

# **Interpolationsmetoder för restfelshantering i höjdled**

## **vid höjdmätning med GPS**

Runar Gisli Valdimarsson

Gävle 2004



Copyright ©

2004-06-11

Författare Runar Gisli Valdimarsson

Typografi och layout Rainer Hertel

Totalt antal sidor 74

LMV-Rapport 2004:7 – ISSN 280-5731

# **Interpolationsmetoder för restfelshantering i höjdled**

## **vid höjdmätning med GPS**

Runar Gisli Valdimarsson

Gävle 2004

L A N T M Ä T E R I E T





## Förord

Denna rapport är resultatet av ett examensarbete som omfattar 20 poäng vid Väg- och vattenbyggnadsutbildningen vid Lunds Tekniska Högskola. Arbetet har utförts under perioden 2003-09-08 – 2004-04-30.

Rapporten trycks både hos LTH och i rapportserien Geodesi och Geografiska informationssystem hos Lantmäteriet. Bilderna i rapporten som trycks hos Lantmäteriet är i gråskala. I andra versioner används färgskala.

Denna rapport riktar sig framför allt till personer verksamma inom mätningsteknik och lantmäteristudenter.

Jag vill tacka mina handledare Bo-Gunnar Reit vid I-divisionen Geodesi, Lantmäteriet och Lars Harrie, avdelningen för Fastighetsvetenskap, LTH för all hjälp under arbetets gång.

Examinator var Klas Ernald Borges, avdelningen för Fastighetsvetenskap.

Opponenten var Björn Ganzer och Fredrik Persson.

Anders Alfredsson, Lantmäteriet, vill jag tacka för hans hjälp med att få i gång Gtrans.

Malin Alm vill jag tacka för att läsa igenom mitt arbete, bra kritik och synpunkter samt hennes hjälp med svenska språket.

Jag vill även tacka Sigurdur Bjarnason för hans hjälp och synpunkter.

Sist men inte minst vill jag tacka Gudrun Huld Kristinsdottir för hennes hjälp under arbetet.

Lund, 5 maj 2004

---

Runar Gisli Valdimarsson



# Sammanfattning

Traditionella referenssystem är uppdelade i plan och höjd eftersom olika mätmetoder har använts för bestämning i plan (längd- och vinkelmätning) respektive i höjd (avvägning). I och med GPS-tekniken har en ny mätmetod introducerats där punkternas läge bestäms i tre dimensioner, d.v.s. både i plan och höjd samtidigt.

Vid noggrann GPS-mätning i Sverige erhålls primärt höjder över ellipsoiden i SWEREF 99. För omräkning till RH 70 används höjdkorrektionsmodellen SWEN 01L, som korrigerar för geoidseparationen samt för landhöjningen mellan epokerna för RH 70 respektive SWEREF 99. Höjder erhållna genom GPS-mätning och korrektion med SWEN 01L uppvisar avvikelser (restfel) från höjder bestämda genom avvägning från fixar i RH 70.

Detta examensarbete syftar till att förbättra höjdmätning med GPS genom att jämföra och utvärdera interpolationsmetoder för restfelshantering av höjdkorrektioner på nationell och lokal nivå.

Arbetet är delat i två delar, teori och numeriska tester. Teoridelen behandlar geodetisk teori och interpolationsmetoder. I numeriska tester jämförs kriging-interpolation och bilinjär interpolation med interpolering i Delaunay-triangelar både på nationell och lokal nivå. Kriging-interpolation utförs i Idrisi32 och bilinjär interpolation i Microsoft Excel. Interpolering i trianglar gjordes i Gtrans, ett transformationsprogram som är utvecklat av Lantmäteriet.

Två numeriska studier är gjorda. På nationell nivå användes 3 657 mätpunkter och 400 utvärderingspunkter. På lokal nivå, i Borås kommun, användes 32 mätpunkter och 13 utvärderingspunkter. Mätpunkterna användes för att skapa rektangulärt gitter med kriging-interpolation och Delaunay-triangelar i Gtrans. Utvärderingspunkterna interpolerades i gittret och trianglarna och jämfördes med riktiga värdet i punkterna.

Både på nationell och lokal nivå indikerar resultatet av de numeriska testerna på att metoderna som användes i detta examensarbete för restfelshantering förbättrar höjdbestämning med GPS. På nationell nivå indikerar resultatet att nuvarande metod för restfelshantering i höjddled med linjär interpolation i Delaunay-triangelar ger bättre resultat än kriging-interpolation och bilinjär interpolation. På lokal nivå (i Borås kommun) tyder resultaten på att kriging-interpolation och bilinjär interpolation är användbar metod för restfelshantering i höjddled. Att resultatet är så olika på nationell och lokal nivå kan bero på data, eventuell större korrelation av restfel på nationell nivå. Med tanke på att underlaget på lokal nivå innehöll relativt få punkter bör ytterligare studier genomföras innan någon säkrare slutsats kan dras.

**Nyckelord:** Höjdmätning, GPS, restfelshantering, kriging-interpolation, bilinjär interpolation, Delaunay-triangulering.



## Summary

Traditional reference systems are divided into plane and elevation because different survey methods have been used for determining in plane (distance- and angle measurements) respectively in elevation (leveling). With the GPS-technology a new survey method has been introduced where the point's position is determined in three dimensions, i.e. both in plane and elevation, at the same time.

In accurate GPS-surveying in Sweden are primarily elevations over the ellipsoid in SWEREF 99 received. For calculating to RH 70 is the height correction model SWEN 01L used, which corrects for the geoid separation and the land uplift between the epoch for RH 70 respectively SWEREF 99. Elevation received with GPS-surveying and correction with SWEN 01L prove to have divergence from elevation determined with leveling from points in RH 70.

This Masterthesis aims to improve elevation measuring with GPS by comparing and evaluating interpolations methods for handle residual of height corrections on national and local level.

This Masterthesis is divided into two parts, theory and numerical tests. The theoretical part describes geodetic theory and interpolation methods. In numerical tests, kriging interpolation and bilinear interpolation are compared with interpolation in Delaunay-triangles both on national and local level. Kriging interpolation was performed in Idrisi32 and bilinear interpolation in Microsoft Excel. Interpolation in triangles was performed in Gtrans, a transformation program which is developed by Lantmäteriet.

Two numerical studies were made. On national level 3 657 measuring points were used and 400 test points. On local level, in Borås municipality, 32 measuring points were used and 13 test points. The measuring points were used for making rectangular grid with kriging interpolation and Delaunay-triangles in Gtrans. The test points were interpolated both in the grid and in the triangles and were compared with the right value in the points.

Both on national and local level indicates the results of the numerical tests that the methods which were used in this thesis for handle residuals improve elevation measuring with GPS. On national level indicates the results that the present method for residual handles in elevation with linear interpolation in Delaunay-triangles gives better result than kriging interpolation and bilinear interpolation. On local level (in Borås municipality) the results indicate that kriging interpolation and bilinear interpolation is useful for residual handles in elevation. That the results are so different on national and local level can depend on data, possible bigger correlation on national level. The study on local level contained relatively few points,

therefore further studies are required before any certain conclusion can be made.

**Keywords:** Leveling, GPS, residual handle, kriging interpolation, bilinear interpolation, Delaunay-triangulation.

# **Interpolationsmetoder för restfelshantering i höjdled vid höjdmätning med GPS**

	<b>Förord</b>	<b>5</b>
	<b>Sammanfattning</b>	<b>7</b>
	<b>Summary</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>15</b>
1.1	Allmänt	15
1.2	Bakgrund	15
1.3	Syfte	16
1.4	Metod	16
1.5	Rapportutformning	16
<b>2</b>	<b>Geodetisk teori</b>	<b>17</b>
2.1	Referensellipsoider	17
2.2	Geoid	19
2.3	Höjdbestämmning	20
2.4	Vertikala förändringar	22
2.4.1	Landhöjningen	22
2.5	<b>Geodetiska referenssystem i Sverige</b>	<b>23</b>
2.5.1	Horisontella referenssystem	23
2.5.2	Höjdsystem	24
2.5.3	Geoidhöjdssystem	25
2.5.4	Globala tredimensionella referenssystem	26
2.6	Mäta höjd med GPS i Sverige	26

2.6.1	Satellitesystem	27
2.6.2	SWEPOS	28
2.6.3	Mätmetoder	29
<b>2.7</b>	<b>Korrekationer av höjder mätta med GPS</b>	<b>32</b>
2.7.1	Transformation från SWEREF 99 till RH 70/Lokala höjdsystem	32
2.7.2	Gtrans	33
2.7.3	Korrigerig av höjder	34
2.7.4	Önskade egenskaper hos interpolationsmetod	35
<b>3</b>	<b>Interpolationsteori</b>	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>Allmänt</b>	<b>35</b>
<b>3.2</b>	<b>Avståndsviktad medelvärdesinterpolation</b>	<b>36</b>
3.2.1	Egenskaper hos interpolerade ytor	37
<b>3.3</b>	<b>Bilinjär interpolation</b>	<b>37</b>
3.3.1	Egenskaper hos interpolerade ytor	38
<b>3.4</b>	<b>B-spline</b>	<b>39</b>
3.4.1	Egenskaper hos interpolerade ytor	41
<b>3.5</b>	<b>Interpolering i ett nät av trianglar</b>	<b>41</b>
3.5.1	Triangulering	41
3.5.2	Delaunay-triangulering	41
3.5.3	Interpolering	42
3.5.4	Egenskaper hos interpolerade ytor	43
<b>3.6</b>	<b>Kriging</b>	<b>43</b>
3.6.1	Stationära processer	43
3.6.2	Semivarians	43
3.6.3	Kriging-interpolation	46
3.6.4	Egenskaper hos interpolerade ytor	47
<b>3.7</b>	<b>Närmaste-granne-interpolation m.h.a. Voronoi-diagram</b>	<b>47</b>
3.7.1	Egenskaper hos interpolerade ytor	48
<b>3.8</b>	<b>Översikt om metoderna</b>	<b>48</b>
<b>3.9</b>	<b>Val av interpolationsmetod för numeriska tester</b>	<b>48</b>
<b>4</b>	<b>Numeriska tester</b>	<b>49</b>
<b>4.1</b>	<b>Syfte</b>	<b>49</b>
<b>4.2</b>	<b>Data</b>	<b>49</b>
4.2.1	Nationell nivå	49
4.2.2	Lokal nivå, Borås kommun	52
<b>4.3</b>	<b>Metod - Kriging-interpolation och bilinjär interpolation</b>	<b>53</b>
4.3.1	Program	53
4.3.2	Utförande	53
<b>4.4</b>	<b>Metod - Interpolering i triangelnät</b>	<b>57</b>
4.4.1	Program	57

4.4.2	Utförande	58
<b>4.5</b>	<b>Resultat</b>	<b>59</b>
4.5.1	Nationell nivå	59
4.5.2	Lokal nivå	60
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>61</b>
5.1	Resultaten av de numeriska testerna	61
5.2	Praktisk användning	63
5.3	Fortsatta studier av interpolationsteknik	64
<b>6</b>	<b>Slutsatser</b>	<b>64</b>
<b>7</b>	<b>Referenser</b>	<b>65</b>
	<b>Bilaga 1: Ordlista</b>	<b>67</b>
	<b>Bilaga 2: Rasterbild</b>	<b>71</b>



# Interpolationsmetoder för restfelshantering i höjddled vid höjdmätning med GPS

## 1 Inledning

### 1.1 Allmänt

Detta examensarbete har gjorts på uppdrag av I-divisionen Geodesi, Lantmäteriet, Gävle. I-divisionen Geodesi ansvarar för att ta fram nya metoder för geodetiska mätningar och för geodetiska referenssystem.

### 1.2 Bakgrund

Traditionella referenssystem är uppdelade i plan och höjd eftersom olika mätmetoder har använts för bestämning i plan (längd- och vinkelmätning) respektive i höjd (avvägning). I och med GPS-tekniken har en ny mätmetod introducerats där punkternas läge bestäms i tre dimensioner, d.v.s. både i plan och höjd samtidigt.

Utvecklingen inom satellittekniken har inneburit nya möjligheter att utföra positionsbestämning noggrant över långa avstånd. Många nya tillämpningar är helt baserade på satellitteknik och inom traditionella tillämpningar öppnar tekniken nya möjligheter. Teknikens tredimensionella art ställer dock krav på gemensamma referenssystem i både plan och höjd.

Vid noggrann GPS-mätning erhålls primärt höjder över ellipsoiden i SWEREF 99. För omräkning till RH 70 används höjdkorrektionsmodellen SWEN 01L. Punkter erhållna genom GPS-mätning och korrektion med SWEN 01L uppvisar regionala avvikelser från höjder bestämda i RH 70 genom avvägning. Dessa avvikelser kallas för restfel.

På lokal nivå har många kommuner haft sina egna referenssystem. Med hjälp av satellittekniken har vissa kommuner skapat nya referenssystem. Vid transformation mellan olika referenssystem uppkommer avvikelser som behöver hanteras.

I dag använder Lantmäteriet programmet Gtrans för interpolation av restfel i höjddled. Gtrans använder här interpolering med hjälp av Delaunay-trianglar.

## 1.3 Syfte

Detta examensarbete syftar till att förbättra höjdmätning med GPS genom att jämföra och utvärdera interpolationsmetoder för restfelshantering av höjdkorrekktioner på nationell och lokal nivå.

## 1.4 Metod

Arbetet är indelat i två delar, teoridel och numeriska tester. Teorin är i sin tur delad i två delar, geodetisk teori och interpolationsteori. Litteraturstudien i geodetiska delen var för att få kännedom om de restfel som skall interpoleras. Det är viktigt att ha dessa egenskaper för att välja interpolationsmetoder. Sedan gjordes litteratursökning av befintliga interpolationsmetoder. Utifrån dessa teoretiska studier gjordes val av interpolationsmetoder för de numeriska testerna. I de numeriska testerna utfördes interpolation på nationell nivå respektive lokal nivå. Till denna studie erhöles data från I-divisionen Geodesi, Lantmäteriet. På nationell nivå användes 4 057 punkter därav 400 som användes som utvärderingspunkter. De övriga 3 657 punkter användes för att skapa gitter och triangelnät. På lokal nivå användes 13 utvärderingspunkter och 32 punkter för att skapa gitter och triangelnät. Efter interpoleringen jämfördes de interpolerade värdena med de riktiga värdena i utvärderingspunkterna på nationell nivå respektive lokal nivå.

## 1.5 Rapportutformning

Rapporten består av tre delar, teori, numeriska tester samt diskussion och slutsatser.

Första delen består av två kapitel. I kapitel 2 beskrivs referenssystem, ellipsoider, geoid, höjdbestämning och vertikala förändringar, geodetiska referenssystem i Sverige samt hur höjder mäts med GPS i Sverige och höjdkorrekktioner för höjder mätta med GPS. Kapitel 3 behandlar interpolationsteorin allmänt, avståndsviktad medelvärdesinterpolation, bilinjär interpolation, linjär interpolation i ett nät av trianglar och några metoder som är speciellt intressanta för denna tillämpning: B-spline, kriging-interpolationsmetod, närmaste-granne-interpolationsmetod.

Andra delen handlar om numeriska tester. I kapitel 4 interpoleras 400 utvärderingspunkter på nationell nivå respektive 13 utvärderingspunkter på lokal nivå i Borås kommun med kriging-interpolation tillsammans med bilinjär interpolation och den nuvarande metoden linjär interpolation i triangelnät.

Tredje delen består av diskussion och slutsatser. I kapitel 5 finns diskussion för de numeriska testerna och i kapitel 6 dras slutsatserna.



Bilaga 1 innehåller ordlista med förklaringar på några förkortningar och namn som används i rapporten. Bilaga 2 innehåller numerisk data för en rasterbild samt beräkningar för bilinjär interpolation.

## 2 Geodetisk teori

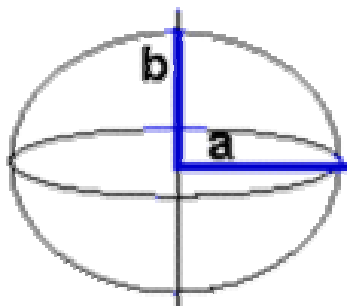
Syftet med kapitlet är att ge en bakgrund till vilka fel som kan finnas när höjder mäts med GPS.

Kapitel 2 handlar om jordens form, hur höjder mäts och vad som påverkar höjdbestämning. Avsnitt 2.1 ger en översikt över ellipsoider, hur de kan användas för att beskriva jorden samt vilka referensellipsoider som används i Sverige. Geoiden beskrivs i avsnitt 2.2 samt sambandet mellan geoidhöjds-system och ellipsoider. Avsnitt 2.3 och 2.4 behandlar höjdbestämning och vad som påverkar den. I avsnitt 2.5 beskrivs de referenssystem som använts i Sverige. De metoder som används vid positionsbestämning med GPS behandlas i avsnitt 2.6. Avsnitt 2.7 handlar om korrektioner av höjder mätta med GPS.

### 2.1 Referensellipsoider

I många sammanhang kan det sägas att jorden är en sfär med en radie kring 6 371 km. Detta går utmärkt så länge noggrannhetskraven är måttliga men med större noggrannhetskrav måste jorden behandlas som en oval ellipsoid istället.

Jorden består till största delen av en seg, trögflytande massa som med tiden anpassar sig till de krafter som påverkar den. Jorden påverkas av sin egen gravitationskraft och eftersom den roterar runt sin axel ett varv varje dag åstadkoms en centrifugalkraft. Den får jorden att avplattas vid polerna och uttänjas vid ekvatorn, så att jorden antar en ellipsoidform. Eftersom jorden roterar runt sin kortare axel är det bra att beskriva den med en rotationsellipsoid (se Figur 2.1). Rotationsellipsoiden benämns jordellipsoiden eller bara ellipsoiden. (Ekman, 2002)



Figur 2.1 Jordellipsoiden och dess halvaxlar  $a$  (storaxeln) och  $b$  (lillaxeln). (Lantmäteriet, 2003)

Jordellipsoidens storlek bestäms av ellipsens storaxel i ekvatorsplanet och lillaxel längs rotationsaxeln. Jordellipsoiden kan beskrivas av ekvationen (Eklundh, 2001):

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad (2.1)$$

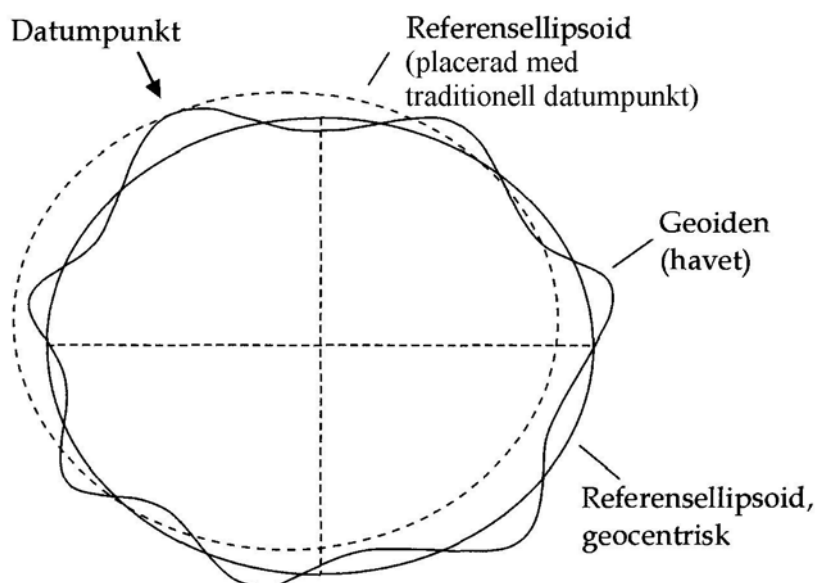
där  $X, Y, Z$  är geocentriska kartesiska koordinater och  $a$  respektive  $b$  är halva storaxeln respektive halva lillaxeln.

För att beskriva jordellipsoidens storlek används oftast  $a$  och avplattningen  $f$  som ges av (Ekman, 2002):

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (2.2)$$

Koordinater måste beräknas på eller på något sätt knytas till en jordellipsoid. Numeriska värden på halva storaxeln och avplattningen för den ellipsoid som används måste därför fastställas. Den ellipsoid som används benämns referensellipsoiden.

Det finns flera olika sätt att placera ellipsoiden. Detta ger, tillsammans med de olika val av referensellipsoid som kan göras, upphov till olika koordinatvärden för en och samma punkt. Idag används geocentrisk placering, d.v.s. ellipsoidens centrum ligger i jordens tyngdpunkt, i samband med satellitpositionering. Innan detta var möjligt brukade en speciell punkt väljas, den geodetiska datumpunkten, i vilken ellipsoiden fixerades så att den sammanföll med geoiden där. Referensellipsoiden och dess placering utgör tillsammans referenssystemets geodetiska datum, se Figur 2.2. I Sverige har främst Stockholmsobservatoriet använts som geodetisk datumpunkt. (Ekman, 2002)



Figur 2.2 Geoiden, geocentriskt placerad referensellipsoid och referensellipsoid placerad med traditionell datumpunkt. (Ekman, 2002, s. 80, bearbetad)

I Sverige används främst Bessels ellipsoid från 1841 i samband med referenssystemet RT 90 (och RT 38) och ellipsoiden GRS 1980 för referenssystemet SWEREF 99 (Jivall m.fl., 2001). GPS-systemet bygger på WGS 84-ellipsoiden; denna är nästan identisk med GRS 1980-ellipsoiden, skillnaden är endast 0,1 mm i halva lillaxeln (Ekman, 1998). I Tabell 2.1 ses de ellipsoider som används mest i Sverige samt deras halva storaxel och avplattning.

Tabell 2.1. Jordellipsoider som används i Sverige. (Ekman, 1998)

<i>Ellipsoid</i>	<i>Halva storaxeln</i>	<i>1/f</i>
Bessel 1841	6 377 397,155	299,152 812 8
Hayford 1910	6 378 388	297,0
GRS 1980	6 378 137	298,257 222 101
WGS 84 (GRS 1980)	6 378 137	298,257 223 563

## 2.2 Geoid

Om jordens inre massa vore jämnt fördelad skulle världshavsytan anta jordellipsoidens form. I verkligheten är jordens massfördelning inte homogen, så havsytan får en mer komplicerad form. På platser där massan blir tätare i jordens inre, blir tyngdkraften större. Variationer i tyngdkraften påverkar havsytan. En tätare massa med större tyngdkraft drar till sig mer vatten vilket leder till en förhöjning av havsytan. (Ekman, 2002)

Den oregelbundna buktiga yta som sammanfaller med världshavens yta där det finns hav och fortsätter in genom kontinenterna, så den omsluter hela jorden kallas geoid, se Figur 2.2. Geoiden avviker med upp till 100 m från jordellipsoiden. (Ekman, 2002)

Geoidhöjder anger geoidens höjd över jordellipsoiden och betecknas med  $N$ , se Figur 2.3. Ett geoidhöjdssystem refererar både till en bestämd geoid och en bestämd jordellipsoid. Sambandet ges av

$$N = h - H \quad (2.3)$$

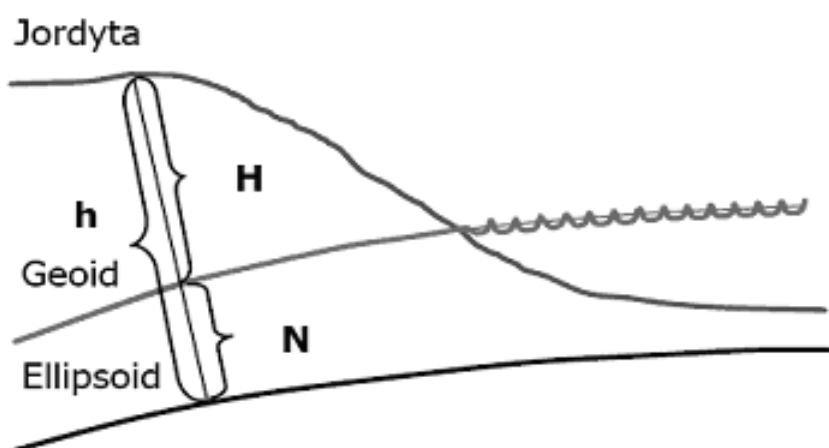
där  $N$  är geoidhöjd,  
 $h$  är höjden över ellipsoiden och  
 $H$  är höjden över havet.

Geoiden återspeglar ojämnheter i jordens massfördelning vilka orsakar variationer i tyngdkraftsfältet. Ojämnheterna i jordens tyngdkraftsfält brukar beskrivas i förhållande till normaltyngdkraftsfältet som är det beräknade tyngdkraftsfältet genererat av referensellipsoiden. Eftersom tyngdkraften varierar beroende hur tät massan är, uppstår avvikelser från normaltyngdkraften. Dessa avvikelser benämns tyngdkraftsanomalier ( $\Delta g$ ). Geoiden kan

beräknas ur sådana tyngdkraftsanomalier med hjälp av Stokes formel (Heiskanen och Moritz, 1990):

$$N = \frac{R}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2.4)$$

där  $R$  är jordradien,  
 $G$  är  $9,798 \text{ m/s}^2$  (medeltyngdkraften över jorden),  
 $\psi$  är vinkelavstånd,  
 $S(\psi)$  är Stokes funktion och  
 $\iint_{\sigma}$  är integralen över en hel sfär.



Figur 2.3 Sambanden mellan höjd över ellipsoiden  $h$ , geoidhöjd  $N$  och höjd över havet  $H$ . (Lantmäteriet, 2003)

Ett annat sätt att bestämma geoiden är att mäta störningar i satelliters banor. En satellits bana påverkas av ojämnheterna i jordens tyngdkraftsfält, så satellitens läge i rymden varierar hela tiden. Med omfattande beräkningar av dessa satellitbanestörningar kan geoidens form i stora drag fås fram (Heiskanen och Moritz 1990). Idag används kombinationer av tyngdkraftsanomalier och satellitbanestörningar för att bestämma geoiden (Ekman, 2002).

En kvasigeoid bygger på tyngdkraftsmätningar, fast på ett annat sätt än geoiden. Kvasigeoiden är inte en nivåyta i egentlig mening. Avståndet till kvasigeoiden kallas för normalhöjd medan ortometrisk höjd definieras som avståndet längs lodlinjen till geoiden. (Heiskanen och Moritz, 1990; Lantmäteriet, 2003)

## 2.3 Höjdbestämning

Det finns flera metoder för att bestämma höjden för en punkt på jordytan. Två av de vanligaste är avvägning och GPS-mätning.

Avvägning är en enkel men mycket noggrann metod. I princip ställs två lodräta graderade stänger upp, på de två punkter mellan vilka höjdskillnaden skall bestämmas. Mittemellan ställs ett horisonterat instrument upp med hjälp av vattenpass (se Figur 2.4). Med avläsning av stängernas graderingar fås höjdskillnaden mellan de två punkterna. Avvägningen styrs av geoiden eftersom vattenpassen känner av lodlinjens riktning, d.v.s. normalen till geoiden. Om avvägningen börjar vid havsytan, en synlig del av geoiden, fås höjden över geoiden, som till vardags är känd som höjden över havet. (Ekman, 2002; Gunnarsson och Ollvik, 2000)

Lodlinjens riktning är inte bara beroende av positionen på jordytan utan är även något beroende av höjden. Effekten blir olika resultat av avvägningarna beroende på vilken väg väljs mellan två punkter. Lösningen på detta problem ligger i att även mäta tyngdkraften i lagom långa delsträckor längs vägen mellan punkterna. Sen räknas produkten av höjdskillnaden  $\Delta H$  och tyngdkraften  $g$ , geopotentialtalet är då summan av dessa produkter (Ekman, 2002):

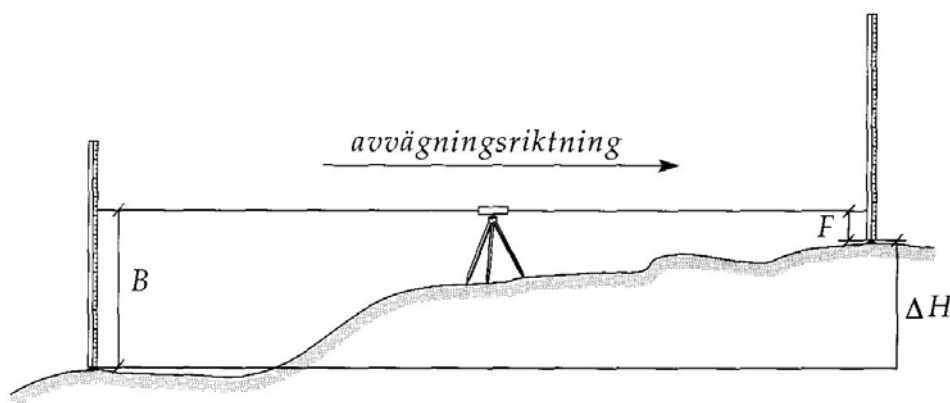
$$C = \sum g\Delta H \quad (2.5)$$

där  $C$  är geopotentialtalet,  
 $g$  är tyngdkraften och  
 $\Delta H$  är höjdskillnaden.

I nästa steg görs en utjämnning av geopotentialtalet för punkterna och slutligen beräknas höjderna enligt:

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \quad (2.6)$$

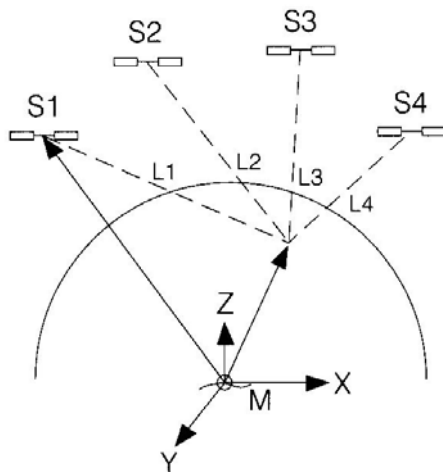
där  $\bar{g}$  är medelvärdet av tyngdkraften längs lodlinjen från punkten ned till geoiden.



Figur 2.4 Höjdbestämning med avvägning, där  $B$  är bakåtläsning,  $F$  är framåtläsning och  $\Delta H$  är höjdskillnad ( $B-F$ ). (Lantmäteriverket, 1996 a, s. 50, bearbetad)

Med satellitpositionering (GPS-mätning) kan höjden över ellipsoiden bestämmas. Satellitpositionering innebär mätning av gångtid för radio-

signaler, som görs helt oberoende av vattenpass och saknar därför kontakt med geoiden. GPS-mätning bygger i sin enklaste form på samtidig mätning av avståndet till minst fyra satelliter, se Figur 2.5. GPS-mätningen ger en tredimensionell position, d.v.s. latitud ( $\varphi$ ), longitud ( $\lambda$ ) och en höjd över ellipsoiden som benämns  $h$  (Hofmann-Wellenhof m.fl., 2001). För att räkna om höjden  $h$  över ellipsoiden till höjden  $H$  över geoiden används sambandet mellan dem, som ges av ekvation 2.3.



Figur 2.5 Positionsbestämning med GPS, där S1 – S4 är GPS-satelliter och L1 – L4 är avståndet från satelliterna till mottagaren, koordinatsystemet är geocentriskt. (Eklundh, 2001, s. 154)

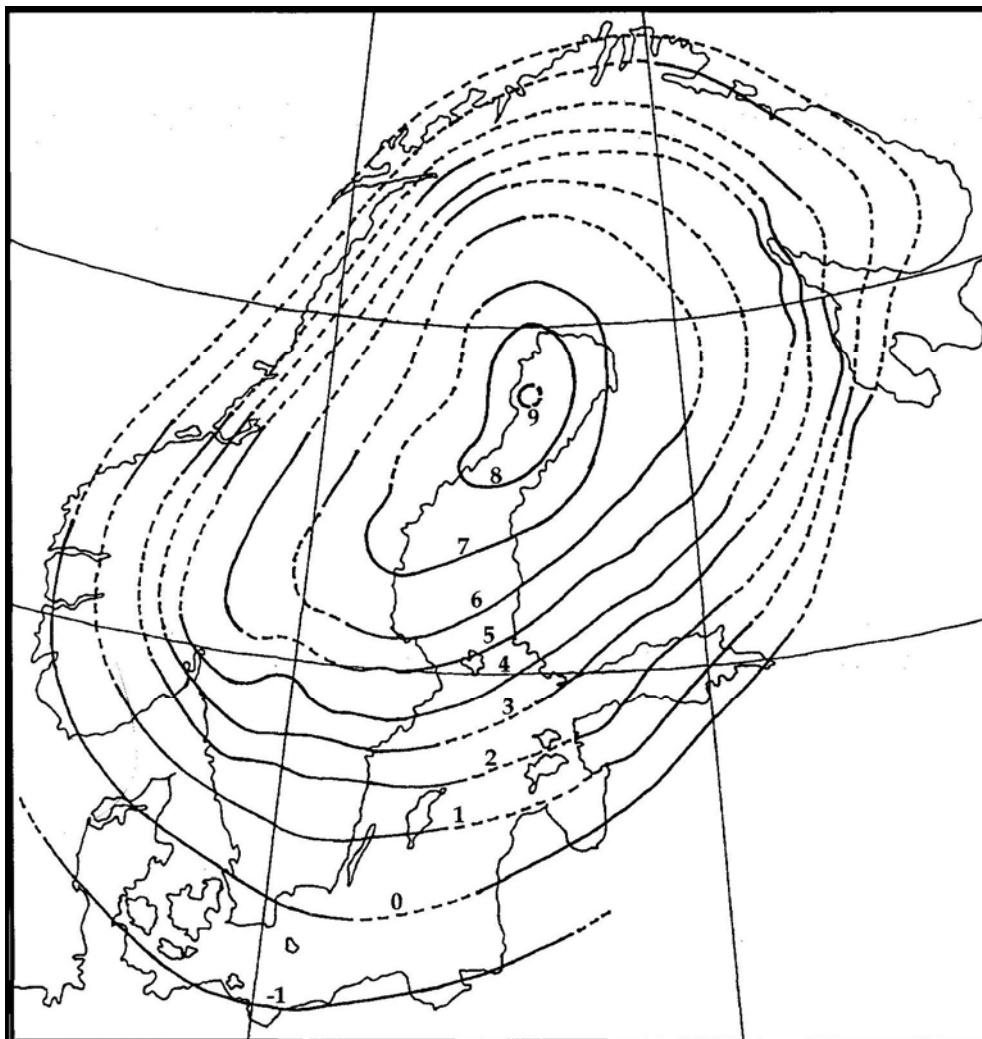
## 2.4 Vertikala förändringar

Vertikal positionsbestämning med hög noggrannhet visar att höjder ändras med tiden. För att lösa detta problem har man tvingats införa epoker för referenssystemen, d.v.s. låsa fast höjderna till vissa årtal. För att ta reda på höjder för ett annat år, måste förändringarna över tiden vara kända (Ekman, 2002). Orsaken till dessa ändringar är flera. För det första lyfts jordskorpan inom vissa områden. För det andra stiger havsnivån och för det tredje påverkas jordens form av solen och månen (Heiskanen och Moritz, 1990).

### 2.4.1 Landhöjningen

Jordskorpan vertikala läge är inte konstant utan ändras med tiden. Under istiden var Norden och Kanada belastad av tjock is som orsakade sjunkning av jordskorpan ner i den underliggande jordmanteln, varvid den trögflytande massan flöt ut åt sidorna. När klimatet blev varmare smälte isen och belastningen på jordskorpan försvann. Så småningom återgår jordskorpan till sitt ursprungliga jämviktsläge (när mantelmassan flyter tillbaka från sidorna). Denna process kallas landhöjningen efter istiden. I vissa områden här i Sverige höjs jordskorpan upp till 10 mm/år (Bottenvikskusten) men i andra områden höjs jordskorpan omkring 1 mm/år (Skåne), se Figur 2.6. (Ekman, 2002)

I Figur 2.6 ges landhöjningen i förhållande till havsytan. Medelhavsytans vertikala läge är inte konstant, de senaste 100 åren har havsnivåhöjningen pågått med 1 mm/år. (Ekman, 2002)



Figur 2.6 Landhöjningen i mm/år i förhållande till havsytan 1892–1991. (Ekman, 2002, s. 123)

## 2.5 Geodetiska referenssystem i Sverige

Traditionellt skiljer man mellan referenssystem i plan och höjd. Avsnitt 2.5.1 ger en översikt över de plana referenssystem och avsnitt 2.5.2 handlar om referenssystemen för höjder. Avsnitt 2.5.3 beskriver referenssystem för geoidhöjder. Andra referenssystem som används i Sverige är de tredimensionella referenssystem som beskrivs i avsnitt 2.5.4.

### 2.5.1 Horisontella referenssystem

I Sverige finns några olika horisontella koordinatsystem, grunddata från två av dem ingår även i European Datum 1987 (ED 87) som är resultatet av den tredje beräkningen av Västeuropas triangelnät (Ekman, 1998). I Tabell 2.2

finns några av de olika horisontella koordinatsystem som har använts i Sverige samt vilken ellipsoid de har räknats på och vilket område de täcker.

Tabell 2.2 Horisontella koordinatsystem som används i Sverige. (Ekman, 1998)

<i>Namn</i>	<i>Ellipsoid</i>	<i>Område</i>
RT 38 och RT P	Bessel 1841	Sverige
RT 90 och RT R	Bessel 1841	Sverige
ED 87	Hayford 1910	Västeuropa

Det plana referenssystem som används mest i dag på nationell nivå i Sverige är RT 90 (Rikets Triangelnät 1990). Det används bland annat för den allmänna kartläggningen. RT 90 baseras på den tredje rikstrianguleringen som genomfördes 1967–1982 och omfattar cirka 3 800 mätpunkter samt en del äldre mätningar (Lantmäteriet, 2003). RT 90 är knuten till Bessels ellipsoid 1841. Det använder Gauss-Krügers vinkelriktiga, transversala cylinderprojektion med medelmeridianen 15°48'29",8 öst Greenwich (2,5 gon väst, Stockholms gamla observatorium), förstöringsfaktor 1,0 (innebär att kartprojektion är längdriktig för medelmeridianen), x-tillägg 0 m och y-tillägg 1 500 000 m, för att få positiva koordinater väster om medelmeridianen.

Kommunala referenssystem är ofta någon lokal förtätning av ett regionalt referenssystem. I samband med den tredje rikstrianguleringen beräknades först koordinater i 12 regionssystem, RT R 01–RT R 12. De använder Gauss-Krügers projektion för sina plana koordinater, men parametervärden kan skilja sig ifrån RT 90, både vad gäller medelmeridianens läge och x- och y-tilläggen. I många kommuner används olika referenssystem i olika delar av kommunen. Orsaken är bland annat kommunsammanslagningarna under 1970-talet. På grund av detta har vissa kommuner skapat nya referenssystem med hjälp av satellitteknik. (Eklundh, 2001)

RIX 95 är ett nationellt projekt som avser dels anslutning av lokala nät för att etablera överföringssamband mellan kommunala och nationella (globala) system, för att underlätta utbyte av geografisk information och rationell användning av GPS-teknik, dels en förtätning och GPS-anpassning av det plana riksnätet. Därutöver ger satsningen ett facit för kontroll av lokala stomnätets homogenitet. Intressenterna i projektet är Lantmäteriet, Sjöfartsverket, Vägverket, Banverket, Försvarmakten samt landets kommuner genom Svenska Kommunförbundet. (Engberg, 2001)

## 2.5.2 Höjdsystem

I Sverige finns ett antal höjdsystem. Rikets höjdsystem betecknas RH (Ekman, 1998). I Tabell 2.3 finns de olika höjdsystem som används i Sverige samt vilken område de täcker.



Tabell 2.3 Höjdsystem som används i Sverige. (Ekman, 1998)

<i>Namn</i>	<i>Område</i>
RH 1900	Sverige
RH 70 (RH B 70)	Sverige
NH 60	Norden
UELN 55 och UELN 73	Västeuropa

RH 00 (också betecknat RH 1900) är höjdsystemet som baserats på den första precisionsavvägningen i Sverige, genomförd 1886–1905 med cirka 2 500 fixpunkter. Systemet används fortfarande på regional och lokal nivå som till exempel i Stockholms stad (Lantmäteriet 2003). Många kommuner har dessutom egna höjdsystem, ofta knutna till RH 00 (Ekman, 1998).

I Sverige används idag främst på nationell nivå, höjdsystemet RH 70 som baseras på den andra precisionsavvägningen gjord 1951–1967 med 9 700 fixpunkter. RH 70 har Normaal Amsterdams Peil (NAP) som nollpunkt liksom NH (Nordiska höjdsystemet) och UELN-systemen (United European Levelling Network). Reduktion för landhöjningen är gjord till epoken 1970.0. Höjder för punkter tillkomna i den tredje precisionsavvägningen och som räknats in i RH 70 betecknas som RH B 70. (Ekman, 1998; Lantmäteriet, 2003)

Den tredje precisionsavvägningen som påbörjades 1979 avslutades året 2003. Den slutgiltiga beräkningen och införandet av det nya höjdsystemet, vars namn blir RH 2000, kommer att ske under 2004. Den består av cirka 51 000 fixpunkter. Nollpunkten i det nya höjdsystemet blir Normaal Amsterdams Peil (NAP) liksom i RH 70. Reduktion för landhöjningen sker till epoken 2000.0. Samma epok tillämpas även i de nordiska grannländernas nya höjdsystem. (Reit, 2004)

### 2.5.3 Geoidhöjdssystem

I Sverige har använts svenska, nordiska eller europeiska geoider. I Tabell 2.4 finns några av de geoidhöjdssystem som har använts i Sverige samt på vilken ellipsoid de räknades och vilket område de täcker.

Tabell 2.4 Geoider som används i Sverige. (Ekman, 1998)

<i>Namn</i>	<i>Ellipsoid</i>	<i>Område</i>
RAK 70	Hayford 1910	Sverige
SWEN 95, SWEN 98 och SWEN 01	GRS 1980	Sverige
NKG 89 och NKG 96	GRS 1980	Norden

Idag används geoidhöjdssystemet SWEN 01 (SWE står för SWEREF och N för geoidhöjd) som är grundat på den nordiska geoidmodellen NKG 96 (Nordiska Kommissionen för Geodesi) och inpassad på SWEREF 99 och

RH 70. Geoidberäkningarna är hanterat så att geoiden i princip är en kvasigeoid. Geoidhöjderna i Sverige ligger mellan 20 m och 37 m. SWEN 01L (L står för landhöjningskorrektin) är en kombination av geoidhöjd och landhöjning, den korrigerar för geoidseparationen samt för landhöjningen mellan epokerna 1970.0 och 1995.5. SWEN 01L är i strikt bemärkelse inte en geoidmodell utan bör rubriceras som en höjdkorrektionsmodell. (Lantmäteriet, 2003)

## 2.5.4 Globala tredimensionella referenssystem

International Terrestrial Reference Frame (ITRF) är en samling internationellt utarbetade globala tredimensionella referenssystem. Dessa system beräknas återkommande sedan 1988, till en början varje år. European Terrestrial Reference System 1989 (ETRS 89, ibland benämnt EUREF 89) är knutet till det globala systemet ITRF 89, men är fixerat till den Eurasiska kontinentalplattans läge 1989 (Jivall, 2001). Även senare års realiseringar av WGS 84 (tredimensionella koordinatsystemet) är knutna till ITRF-systemen (Ekman, 1998).

Koordinaterna i tredimensionella koordinatsystem är normalt ursprungligen kartesiska koordinater  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , som med ellipsoiden specificerad förvandlats till geodetiska koordinater latitud ( $\varphi$ ), longitud ( $\lambda$ ) och höjden över ellipsoiden ( $h$ ). (Ekman, 1998)

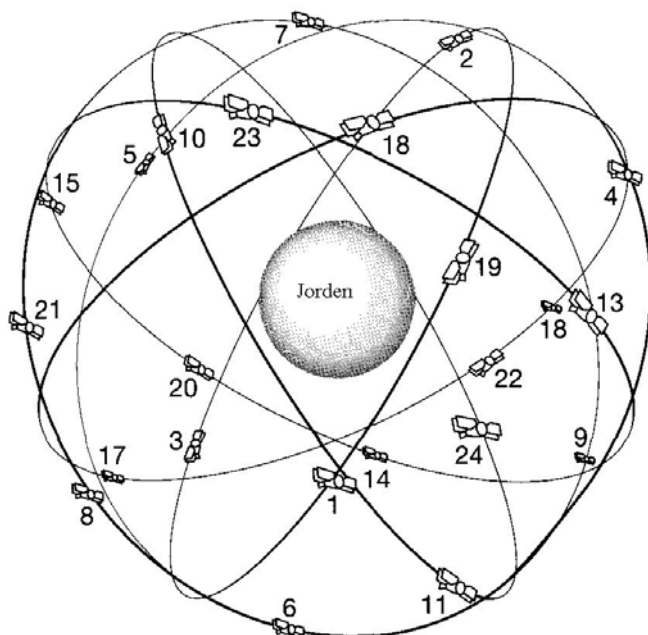
Swedish Reference Frame 1999 (SWEREF 99) är en officiell realisering av ETRS 89, genomförd enligt nu gällande riktlinjer, antagen sommaren 2000 vid EUREF-mötet i Tromsö (Jivall, 2001). Som grund för referenssystemet har data använts från alla nationella, permanenta referensstationer för GPS i Sverige (SWEPOS, se avsnitt 2.6.2), Norge (SATREF), Finland (FINNREF) och Danmark som var igång sommaren 1999. SWEREF 99 systemet är knutet till ellipsoiden GRS 1980, geocentriskt placerad. Lösningen beräknades i ITRF 97 epok 1995.5 och har därefter räknats tillbaka till ETRS 89. Den interna geometrin i SWEREF 99 relaterar till epok 1999.5 och den externa geometrin (i förhållande till resten av världen) relaterar till epok 1989.0 (Lantmäteriet, 2003). Det nationella projektionssystem SWEREF 99 TM är planerat att bli grunden för framtida allmänna kartläggningen i Sverige. I longitudintervall 12°-18° sammanfaller systemet med projektionen UTM zon 33 (Universal Transverse Mercator är ett världstäckande system för kartprojektion). (Engberg, 2001)

## 2.6 Mäta höjd med GPS i Sverige

En översikt över GPS-systemet ges i avsnitt 2.6.1 samt vilka andra satellitbaserade navigationssystem som finns. Avsnitt 2.6.2 handlar om SWEPOS, ett nationellt nät av fasta referensstationer. Det finns en mängd olika sätt att mäta position med hjälp av GPS-satelliterna. I avsnitt 2.6.3 finns förklaring på några av dem.

## 2.6.1 Satellitsystem

Global Position System (GPS) är amerikanskt satellitbaserat navigations-system uppbyggt av USA:s försvarsmakt. Systemet består av 24 satelliter fördelade på 6 nästan cirkulära banplan på omkring 20 200 km höjd över jorden med omloppstid på knappt 12 timmar (se Figur 2.7) samt 5 kontrollstationer, vilka hela tiden är i kontakt med satelliterna. GPS blev operationellt för civilt bruk 1993 och för militärt bruk 1995. (Hofmann-Wellenhof m.fl., 2001)



Figur 2.7 Global Position System (GPS). (Wolf och Ghilani, 2002, s. 325, bearbetad)

Varje signal som sänds från en GPS-satellit består av flera delar. På en sinusformad bärvåg är två binära signaler modulerade: en kod och en dataström. Koden har två syften: dels ett militärt syfte, nämligen att medge kontroll av noggrannheten i realtidstillämpningar, dels att göra så att signaler från olika satelliter kan skiljas åt eftersom var och en satellit har egen kod men alla sänder på samma frekvens. Varje satellit har två frekvenser;  $L1=1\,575,42$  MHz och  $L2=1\,227,60$  MHz. På  $L1$  sänds C/A-koden (1,023 MHz) ut som är koden som civilpersoner kan använda. På  $L1$  och  $L2$  sänds P-koden (10,23 MHz) ut som är användbar för USA:s militär och andra berättigade användare. P-koden kan bytas till okända Y-koden som endast är användbar för det amerikanska Försvarsdepartementet. Dessutom sänds ett satellitmeddelande, med överföringshastigheten 50 bitar per sekund, som innehåller nödvändig information för att beräkna satellitens position och satellitklockans korrektion. Utifrån detta satellitmeddelande kan användaren bestämma sin position. (Hofmann-Wellenhof m.fl., 2001)

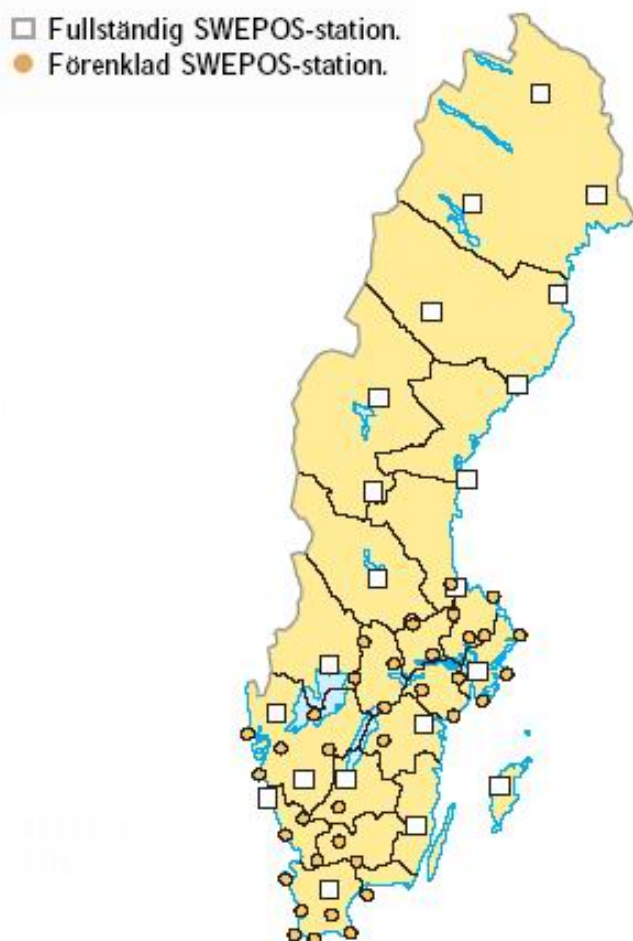
GLONASS (Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema) är ett ryskt navigationssystem som i grunden är militärt. Det startade i oktober 1982 och är uppbyggt och förvaltas av det ryska försvaret. Systemet skall egentligen

innehålla 24 satelliter men har endast gjort det under en kort period 1996. (Lantmäteriet, 2003)

GALILEO är ett framtida europeiskt system för navigering och positionering med hjälp av satelliter. Systemet, som är civilt, kommer att vara kompatibelt med de existerande navigeringssystemen GPS och GLONASS. Det kommer att bestå av 30 satelliter. Driftstart beräknas ske år 2008 men signal börjar sändas år 2005. (Directorate-General, 2004)

## 2.6.2 SWEPOS

SWEPOS är ett nationellt nät av fasta referensstationer i Sverige för GPS (se Figur 2.8). Uppgiften för SWEPOS är att tillhandahålla data från GPS-satelliterna för en mängd olika tillämpningar, allt från positionsbestämning med meternoggrannhet i realtid för bl.a. navigering och datainsamling för databaser med geografisk information, till studier av rörelser i jordskorpan på millimeternivå. Nätverks-RTK (se avsnitt 2.6.3) och efterberäkningsdata är en del av de tjänster som SWEPOS erbjuder. (SWEPOS, 2004)



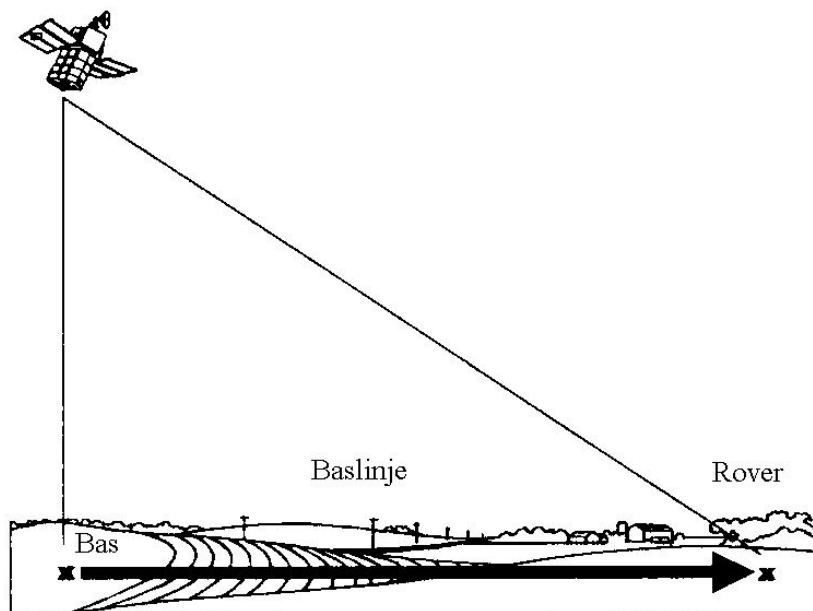
Figur 2.8 SWEPOS-stationer i Sverige. (SWEPOS, 2003)

### 2.6.3 Mätmetoder

Vid mätning med en GPS-mottagare bestäms tredimensionell position (till exempel latitud ( $\varphi$ ), longitud ( $\lambda$ ) och höjden över ellipsoiden ( $h$ )) och en obekant tidsskillnad. Tidsskillnaden uppstår eftersom mottagarens klocka inte är synkroniserad med GPS-satelliternas tid. För att kunna bestämma dessa fyra obekanta parametrar behöver mottagaren få signaler från minst fyra olika satelliter samtidigt. (Hofmann-Wellenhof m.fl., 2001)

Absolut mätning är enklaste formen av mätning där endast en mottagare behövs. Mottagarpositionen bestäms direkt i förhållande till satelliterna genom en inbindning i rymden. För att få tredimensionell position behövs signaler från minst 4 satelliter. Den fås initialt i det koordinatsystem som satelliterna använder, d.v.s. ett globalt system. Noggrannheten ligger mellan cirka 5 och 20 m. (Lantmäteriet, 2003)

Relativ mätning används om högre noggrannhet än 5–20 m önskas. Minst två mottagare behövs för att mäta relativt, där en mottagare ställs över en känd punkt (se Figur 2.9). Genom att bilda differenser mellan de båda punkternas mätningar elimineras eller reduceras de flesta felkällorna som försämrar mätnoggrannheten vid absolut mätning. För att få en lösning måste kontakt finnas med minst 4–5 satelliter som är gemensamma för de båda mottagarna. Relativ mätning kan vara antingen kodmätning eller bärvågsmätning. (Lantmäteriet, 2003)



Figur 2.9 Principen för relativ mätning. (Hofmann-Wellenhof m.fl., 2001, s. 141, bearbetad)

Kodmätning är avståndsmätning på C/A- eller P-koden. Avståndet till en satellit bestäms genom att mäta hur lång tid det tar för en radiosignal från satelliten att nå mottagaren. Satelliterna och mottagarna är synkroniserade att generera samma kod vid samma tidpunkt. Tidsskillnaden erhålls genom

jämförelse av inkommen kod från satelliten och den i mottagaren genererade koden. Noggrannheten i kodmätningen kan uppskattas till några meter. (Lantmäteriet, 2003)

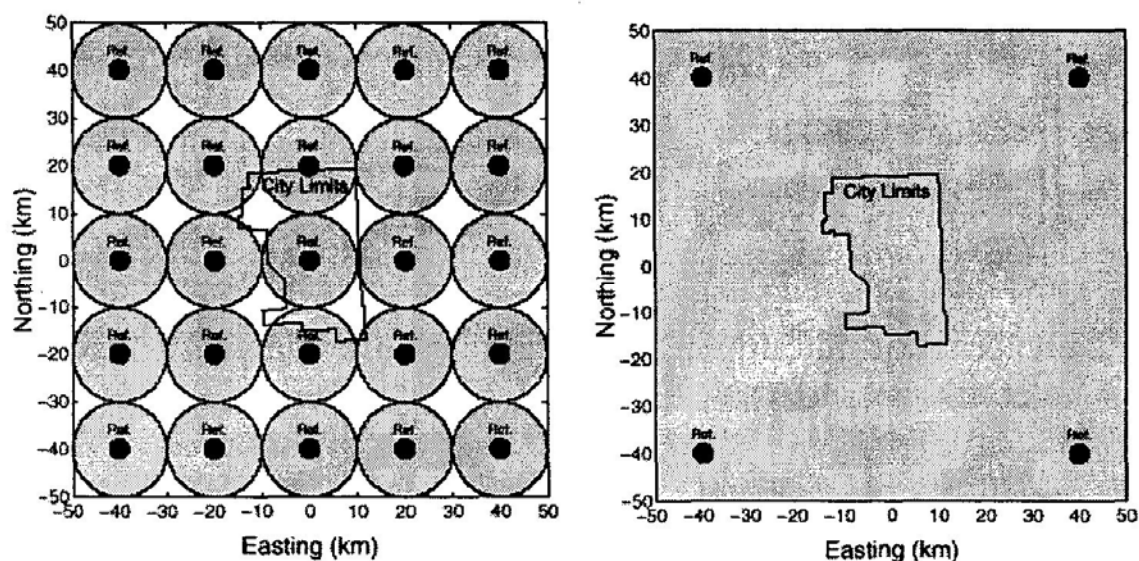
Bärvågsmätning bygger på att en signal, med samma frekvens som GPS-systemets bärvåg, skapas i GPS-mottagaren. Den mottagna satellitsignalen kombineras med den i mottagaren genererade frekvensen. Bärvågen innehåller inga tidsmärken och därigenom kan signalens gångtid (fördröjning) ej mätas upp direkt. Däremot kan fasen för den mottagna signalen bestämmas mycket noggrant, med upplösningen någon hundraleds period vilken motsvarar några mm. Avståndet mellan satellit och mottagare kan i princip uttryckas som ett antal hela bärvågsperioder plus en del av period. Bestämning av delen av perioden sker genom fasmätning, som är en relativt okomplicerad procedur. Vid bibehållen låsning av satellitsignalen till mottagaren räknas förändringen av antalet hela våglängder från den tidpunkt då mottagaren först låste på signalen. För att kunna bestämma avståndet mellan satellit och mottagare måste antalet hela perioder vid den tidpunkt då mätningen började, s.k. periodobekanta bestämmas. Vidare leder tillfälliga avbrott i signallåsningen till att ett okänt antal perioder förloras, s.k. periodbortfall. Korrigering för denna störning kan göras. (Lantmäteriet, 2003)

Statisk mätning är en variant av relativ mätning, där positionen erhålls genom efterberäkning. En GPS-mottagare står då en längre tid, vanligtvis 1–3 timmar, och loggar bärvågsdata. Efter mätningen är gjord beräknas positionen mot andra bärvågsdata, tagna ur en mottagare som stått på en känd position. Noggrannheten är cirka 5 mm + 1 ppm (eng. *parts per million*) av avståndet, d.v.s. noggrannheten försämras med 1 mm för varje kilometer i ökat avstånd mellan mottagare, beroende på hur länge data loggats. Generellt sätt gäller att ju längre tid, desto bättre positionsbestämning erhålls. (Lantmäteriet, 2003; Wolf och Ghilani, 2002)

Snabb statisk mätning är en variant av statisk mätning med kortare observationstid, 5–20 minuter, än statisk mätning. Fungerar på avstånd upp till 25 km. Noggrannheten är något sämre än vid vanlig statisk mätning, den kan dock nå 5 mm + 1 ppm vid bästa förhållanden. Särskilda metoder för bestämning av periodobekanta används. (Lantmäteriet, 2003; Wolf och Ghilani, 2002)

Semikinematisk mätning är en variant av relativ mätning, där positionen erhålls i realtid. Vid semikinematisk mätning förflyttas mottagaren mellan de olika mätpunkterna, men står stilla under den korta stund, några sekunder när mätningen pågår. En variant av detta är RTK (Real Time Kinematic), i vilken bärvågsmätning används. En annan variant är DGPS (Differentiell GPS), i vilken kodmätning används. För båda dessa mättekniker krävs en radiolänk, genom vilken kontakten hålls med en annan GPS-mottagare, vilken är placerad på en känd position. Noggrannheten för DGPS blir 0,5–2 m men för RTK blir den 1–3 cm. (Lantmäteriet, 2003)

Kinematisk mätning är en variant av relativ mätning, där mätningen pågår medan mottagaren är i rörelse. RTK (Real Time Kinematic) är kinematisk relativ bärvågsmätning i realtid. En referens (bas) står över en känd punkt och tar emot GPS-registreringar och skickar korrektioner till den rörliga enheten (rover) med radiokommunikation eller via GSM. I den rörliga enheten beräknas både GPS-registreringar från basen och den rörliga enheten och ger resultat med noggrannhet mellan 1 och 3 cm (5–10 mm + 2 ppm). Radiosändaren kan begränsa avståndet mellan bas och rover (< 10 km) men avståndet kan ökas med användning av starkare sändare eller repeater. Noggrannheten minskar dock med ökat avstånd. (Lantmäteriet, 2003; Wolf och Ghilani, 2002)



Figur 2.10 Användning av flera oberoende referensstationer (till vänster) respektive ett nätverk av referensstationer för att täcka önskat område. (Refstrat, 2000)

Nätverks-RTK innebär att flera referensstationer används (se Figur 2.10) i stället för en (som vanlig RTK). En nationell nätverks-RTK-tjänst tillhandahållen av Lantmäteriet använder sig av nätet av fasta referensstationer i Sverige, som kallas SWEPOS (se avsnitt 2.6.2). GPS-registreringar på de fasta referensstationerna överförs varje sekund till en driftledningscentral i Gävle, där korrektioner beräknas och sänds ut via GSM till användarna. Detta innebär vissa fördelar, bl.a. att en mätning kan utföras på betydligt längre avstånd från närmaste referensstation p.g.a. att jonosfären modelleras, som annars en av de största felkällorna. Även arbetskostnaden minskar nämnvärt genom att en ny referensstation inte behöver etableras varje dag. Noggrannheten för nätverks-RTK är likvärdig med den som för vanlig RTK-mätning. (Lantmäteriet, 2003; SWEPOS, 2003)

Noggrannheten för GPS-mätning är sämre i höjddled än i plan med en faktor 1,5 till 2,0 (Hofmann-Wellenhof m.fl., 2001). I Tabell 2.5 här nedan ges noggrannheten i plan.

Tabell 2.5 Noggrannhet för mätningar med GPS.

Mätmetod	Noggrannhet [m]	Noggrannhet beroende på avstånd
Absolut mätning	5 -20	
Statisk mätning	0,005	1 ppm (1 mm per km)
Snabb statisk mätning	0,005	1 ppm
DGPS	0,5 - 2,0	
RTK-mätning	0,005 - 0,010	2 ppm

De vanligaste metoderna som används för geodetiska tillämpningar är statisk mätning, snabb statisk mätning, RTK och nätverks-RTK.

## 2.7 Korrektioner av höjder mätta med GPS

### 2.7.1 Transformation från SWEREF 99 till RH 70/Lokala höjdsystem

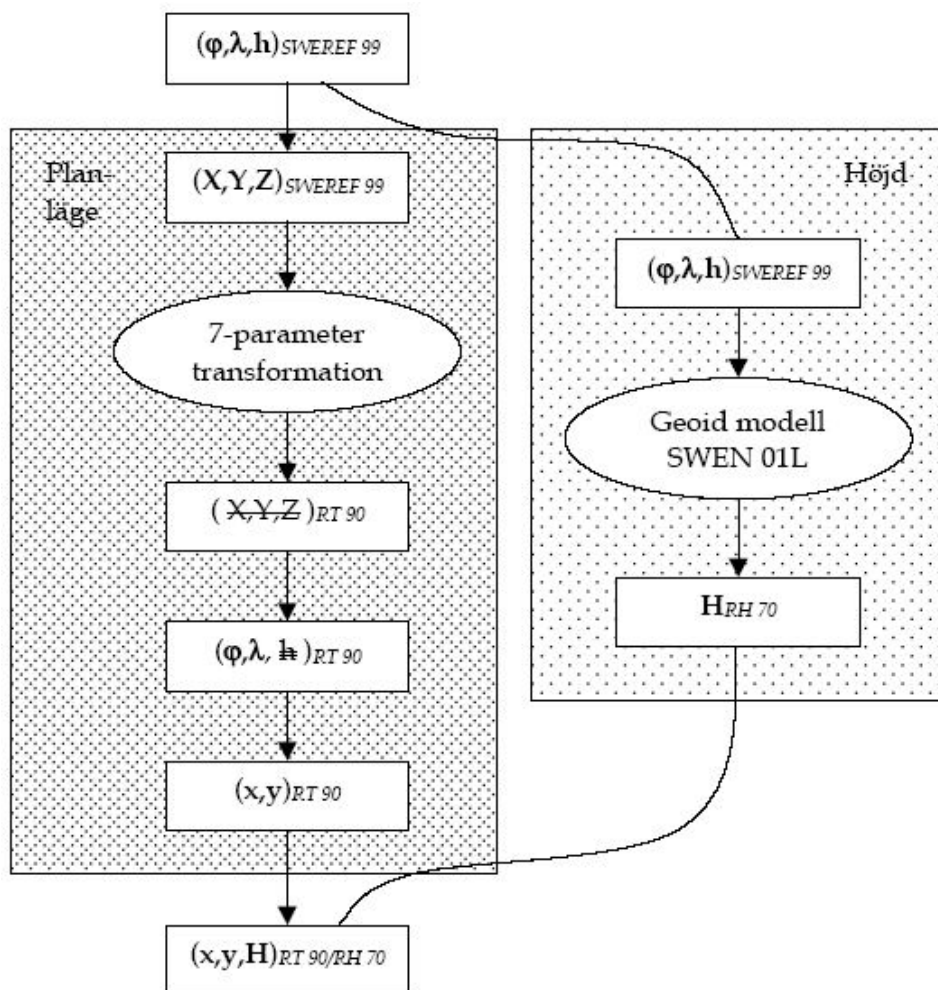
Vid noggrann GPS-mätning i Sverige erhålls primärt höjder över ellipsoiden i SWEREF 99. För omräkningar till RH 70 används höjdkorrektionsmodellen SWEN 01L. Sambandet mellan SWEREF 99, RH 70 och SWEN 01L ges av (se Figur 2.11):

$$H_{RH70} = h_{SWEREF99} - N_{SWEN01L} \quad (2.7)$$

På liknande sätt som SWEN 01L tillskapats, kan geoidmodeller tas fram som är anpassade till SWEREF 99 och lokala höjdsystem:

$$H_{Lokalt} = h_{SWEREF99} - N_{Lokalt} \quad (2.8)$$





Figur 2.11 Transformation från SWEREF 99 till RT 90 och RH 70. (Jivall m.fl., 2001, s. 23)

Studier gjorda vid Lantmäteriet visar att de höjder som erhålls enligt ekvationer 2.7 och 2.8 avviker med varierande belopp från motsvarande avvägda höjder. Avvikelserna uppträder inte som vitt brus utan visar tydliga systematiska trender.

RH 70-höjder erhållna genom GPS-mätning och korrektion med SWEN 01L uppvisar avvikelser från de höjder bestämda i RH 70 genom avvägning. Orsaken till dessa avvikelser är brister i geoidmodellen, brister i landhöjningsmodellen, brister i GPS-mätningen samt brister i de avvägda höjderna.

## 2.7.2 Gtrans

I dag använder Lantmäteriet programmet Gtrans för interpolation av höjddkorrektioner. Korrektionsmodellerna är baserade på bilinjär interpolation i rektangulära gitter (se avsnitt 3.3). I standardinstallationen av Gtrans finns höjddkorrektionsmodellen för SWEN 01L lagrad som gridfil.

En gridfil i Gtrans kan vara definierad med antingen x- och y-koordinater eller latitud och longitud, jämför Figur 2.12.

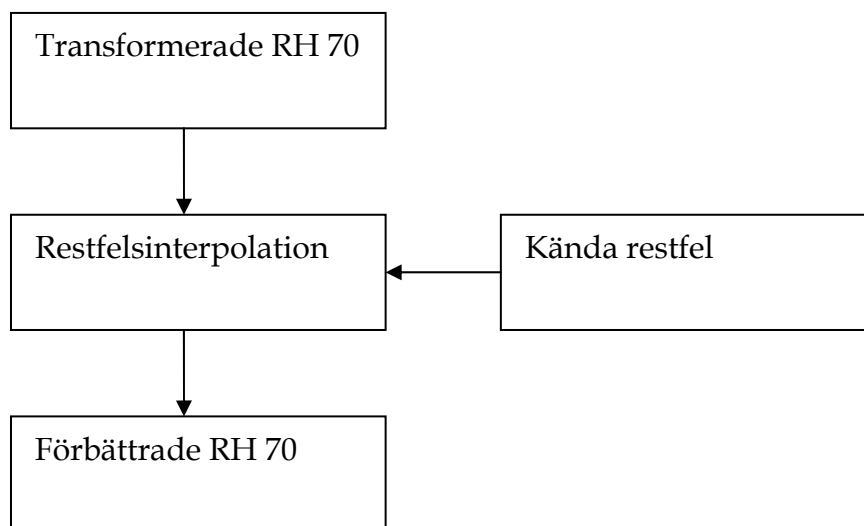


Figur 2.12 Bilinjär interpolation i SWEN 01L i Gtrans.

I Gtrans är det också möjligt att addera till egna definierade gridfiler, t.ex. för lokala höjdkorrektionsmodeller. Gtrans har även en facilitet för interpolation av restfel, se nedan.

### 2.7.3 Korrigering av höjder

Det finns flera sätt att förbättra höjder med hjälp av restfelsinformation. I detta examensarbete studeras hur interpolering av restfel kan användas, denna process skall utföras efter transformation enligt Figur 2.11. I Figur 2.13 ges en skiss av processen.



Figur 2.13 Processen för interpolering av restfel.

Lantmäteriet har hittills baserat korrektionsmodeller och felmodeller på linjär interpolation i Delaunay-triangular. I Gtrans kan Delaunay-triangular (se avsnitt 3.5.2) med restfel eller höjder skapas. Med linjär interpolation i trianglarna fås

information om restfelen i varje punkt som interpoleras. I detta examensarbete studeras alternativa metoder för restfelshantering i höjddled.

Följande bör beaktas i val av interpolationsmetod:

- Geoiden och landhöjningen är geodynamiska fenomen. Båda kan beskrivas med släta ytor, eftersom de faktiska förhållandena i jordskorpan och jordens inre sätter gränser för hur krökta dessa ytor kan vara.
- De GPS-bestämda och avvägda höjderna å sin sida är behäftade med mätfel, individuella för varje punkt. Viss korrelation kan finnas mellan mätfelen beroende på hur mätningar och beräkningar utförts.

## 2.7.4 Önskade egenskaper hos interpolationsmetod

I kapitel 3 behandlas olika interpolationsmetoder. Med hänsyn av egenskaperna i avsnitt 2.7.3 skall interpolationsmetoderna ha egenskaperna:

- Filtrera bort tillfälliga fel i observationspunkter som ligger till grund för korrektionsmodellen.
- Skapa ytor som är kontinuerliga och har kontinuerliga derivator.

# 3 Interpolationsteori

Kapitel 3 handlar om interpolationsmetoder. Avsnitt 3.1 beskriver interpolationsmetoder allmänt. I avsnitt 3.2 beskrivs avståndsviktad medelvärdesinterpolation. Avsnitt 3.3 handlar om bilinjär interpolation, dvs. den metod som används idag för interpolering av geoidhöjder i Sverige. I avsnitt 3.4–3.7 beskrivs några andra interpolationsmetoder som är intressanta i detta examensarbete: B-spline, interpolering i triangelnät, kriging-interpolation och närmaste-granne-interpolation. Avsnitt 3.8 innehåller en jämförelse av de olika interpolationsmetoderna samt en diskussion om vilka av dem som uppfyller villkoren från avsnitt 2.7.4. I avsnitt 3.9 ges de interpolationsmetoder som skall användas för numeriska tester.

## 3.1 Allmänt

Interpolation är skattning av okända (funktions)värden på grundval av omgivande (och närliggande) kända värden (Allén, 1997). Grunden för all rumslig interpolation av data är rumslig autokorrelation, d.v.s. om en variabel mäts, som till exempel temperatur, på olika platser, kommer temperaturen på platser som ligger nära varandra vara mer lika än de som ligger långt ifrån varandra (Eklundh, 2001).

Där finns många metoder för interpolation. De kan delas upp i olika grupper som till exempel globala och lokala metoder. De globala interpolationsmetoderna använder alla mätpunkter i databasen när ett värde räknas för en ny punkt. De lokala metoderna använder ett antal punkter som ligger nära den nya punkten som skall interpoleras fram.

Metoder för interpolation kan även delas in i metoder som går genom mätpunkterna så att interpolering ger exakta värden i mätpunkterna, d.v.s. filtrerar ej bort tillfälliga fel, och metoder som inte går genom mätpunkterna.

Interpolationsmetoderna skapar olika typer av ytor. Ytorna kan vara kontinuerliga eller ej kontinuerliga. Om ytorna är kontinuerliga kan deras derivator vara kontinuerliga eller ej.

I detta examensarbete studeras följande interpolationsmetoder, alla metoderna är/kan vara lokala metoder:

- avståndsviktad medelvärdesinterpolation,
- bilinjär interpolation,
- b-spline,
- interpolering i ett nät av trianglar
- kriging och
- närmaste-granne-interpolation

Interpolationsmetoder baseras på viktade medelvärden. Det som skiljer mellan olika metoder är hur vikter sätts och vilka punkter som skall ingå. Den allmänna formen ges av (Eklundh, 2001):

$$z(x_p) = \frac{\sum_{i=1}^n z(x_i) \cdot w_{pi}}{\sum_{i=1}^n w_{pi}} \quad (3.1)$$

där  $z(x_p)$  är det interpolerade värdet,  
 $n$  är antalet mätpunkter,  
 $z(x_i)$  är värdet för mätpunkt  $i$  och  
 $w_{pi}$  är vikten för mätningen  $i$  relaterat till punkten  $p$ .

Vanligen har punkter som ligger nära det interpolerade värdet större inflytande (högre vikt) på resultatet än de punkter som ligger längre bort.

### 3.2 Avståndsviktad medelvärdesinterpolation

I interpolationsmetoden avståndsviktad medelvärdesinterpolation används t.ex. vikterna:

$$w_{pi} = \frac{1}{d^k} \quad (3.2)$$

där  $d$  är avståndet mellan punkterna  $p$  och  $i$ , och  
 $k$  är en potens som styr avståndsberoendet.

Oftast ligger  $k$  mellan 1 och 3. Om  $k$  blir litet avspeglas inte lokala variationer och om  $k$  blir stort får närliggande punkter stort inflytande. Om sökfönstret blir så litet att det endast finns en punkt inom det, då är det närmaste-granneinterpolation (se avsnitt 3.7). Det samma gäller om  $k \rightarrow \infty$ . Om sökfönstret i stället är mycket stort tenderar det interpolerade värdet att gå mot det globala medelvärdet för alla punkterna om  $k$  är litet. Om  $k$  är lika med 0 får varje vikt värdet 1 och då blir nämnaren lika med  $n$ , d.v.s. metoden är vanlig oviktad medelvärdesmetod. För att få ett lämpligt värde på sökfönstret måste det testas från fall till fall. Samma gäller för  $k$ . (Eklundh, 2001)

### 3.2.1 Egenskaper hos interpolerade ytor

Avståndsviktad medelvärdesinterpolation kan filtrera bort tillfälliga fel om parametrarna bestäms så. Den har varken kontinuerliga ytor eller kontinuerliga derivator.

## 3.3 Bilinjär interpolation

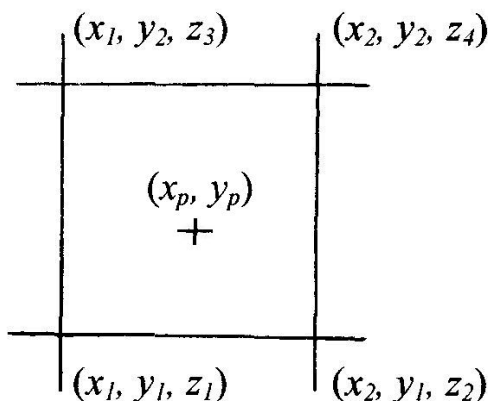
Bilinjär interpolation är kanske den vanligaste interpolationsmetoden i regelbundna rutnät. Den bygger på linjär interpolation i två dimensioner. En grundläggande tanke hos den bilinjära interpolationen i ett regelbundet rutnät (se Figur 3.1) är att anpassa en bilinjär yta till de fyra hörnen. Formeln för ytan ges av (Östman, 1995):

$$z = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x \cdot y \quad (3.3)$$

där 
$$x = \frac{x_p - x_1}{\Delta x} \quad (3.4)$$

$$y = \frac{y_p - y_1}{\Delta y}$$

$\Delta x$ ,  $\Delta y$  är rutnätets maskvidd, och punktnummering enligt Figur 3.1.



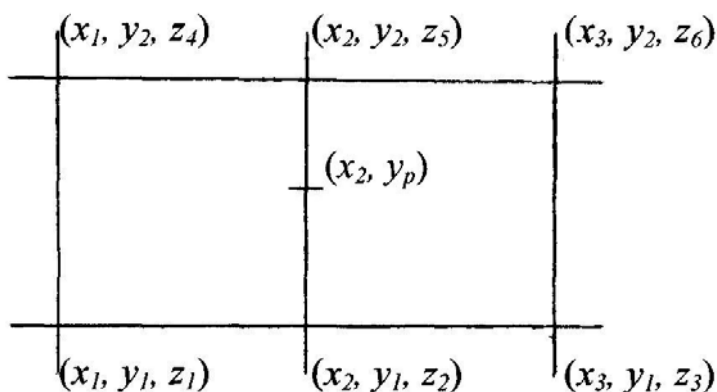
Figur 3.1 Bilinjär interpolation i ett rutnät.

Formeln är inte fullständig andragradsyta ty  $x^2$ - och  $y^2$ -termerna saknas. Medvetet har antalet termer valts till fyra, så att antalet obekanta ( $a_i$ ) är lika med antalet villkor (ytan går genom de fyra punkterna). Detta gör att formelsambanden för den bilinjära interpolationen blir enkla. Genom att anpassa den bilinjära ytan (i ekvation 3.3) på de fyra hörnen fås:

$$\begin{aligned} a_0 &= z_1 & (3.5) \\ a_1 &= z_2 - z_1 \\ a_2 &= z_3 - z_1 \\ a_3 &= z_4 + z_1 - z_2 - z_3. \end{aligned}$$

### 3.3.1 Egenskaper hos interpolerade ytor

Nedan studeras om ytor som interpolerats fram med bilinjär interpolation är kontinuerliga respektive har kontinuerliga derivator. Framställningen bygger på Östman (1995).



Figur 3.2 Två intilliggande ytor i ett rutnät.

Anta att där finns två intilliggande rutor enligt Figur 3.2. För enkelhets skull antas att  $\Delta x = \Delta y = 1$ .

Ekvationen för vänstra ytan blir:

$$z_v = z_1 + (z_2 - z_1)(x - x_1) + (z_4 - z_1)(y - y_1) + (z_5 + z_1 - z_2 - z_4)(x - x_1)(y - y_1) \quad (3.6)$$

och för den högra:

$$z_h = z_2 + (z_3 - z_2)(x - x_2) + (z_5 - z_2)(y - y_1) + (z_6 + z_2 - z_3 - z_5)(x - x_2)(y - y_1).$$

Betrakta nu en punkt  $p$  på den gemensamma begränsningslinjen. Punkten  $p$  har koordinaterna  $(x_2, y_p)$ , där  $y_1 < y_p < y_2$ . Det interpolerade värdet för vänstra ytan blir:

$$z_{pv} = z_1 + (z_2 - z_1)(x_p - x_1) + (z_4 - z_1)(y_p - y_1) + (z_5 + z_1 - z_2 - z_4)(x_p - x_1)(y_p - y_1) \quad (3.7)$$

Med insättning av  $\Delta x = \Delta y = 1$ , (d.v.s.  $x_2 - x_1 = 1$  och  $y_2 - y_1 = 1$ ), fås:

$$z_{pv} = z_2 + (z_5 - z_2)(y_p - y_1)$$

och för den högra ytan fås:

$$z_{ph} = z_2 + (z_3 - z_2)(x_p - x_2) + (z_5 - z_2)(y_p - y_1) + (z_6 + z_2 - z_3 - z_5)(x_p - x_2)(y_p - y_1)$$

$$z_{ph} = z_2 + (z_5 - z_2)(y_p - y_1).$$

Samma värde fås alltså i både vänstra och högra ytan. Detta gäller för alla sidor i rutnätet. Detta innebär att de bilinjära ytorna är kontinuerliga.

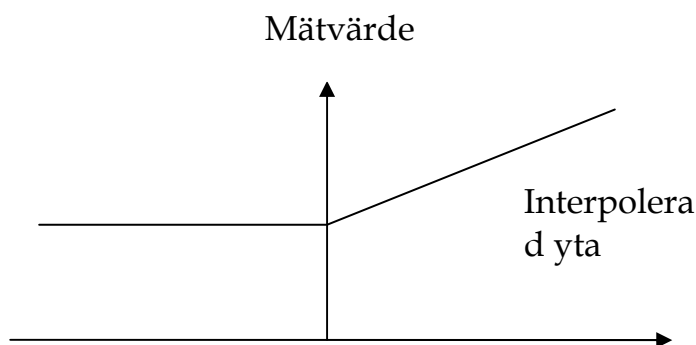
Studeras den partiella derivatan i x-led, fås för den vänstra rutan:

$$\frac{dz_v}{dx} = z_2 - z_1 + (z_5 + z_1 - z_2 - z_4)(y - y_1) \quad (3.8)$$

och motsvarande för den högra rutan:

$$\frac{dz_h}{dx} = z_3 - z_2 + (z_6 + z_2 - z_3 - z_5)(y - y_1).$$

Betrakta nu derivatan i punkten  $p$ , d.v.s. i  $(x_2, y_p)$ . Då ses att derivatorna ej stämmer överens. Kontinuerliga bilinjära ytor fås ej. Detta innebär att den interpolerade ytan ej heller har kontinuerliga derivator, d.v.s. att de ser taggiga ut (se Figur 3.3).



Figur 3.3 Taggig interpolerad yta.

Bilinjär interpolation har alltså kontinuerliga ytor men inte kontinuerliga derivator och ytan går genom alla mätpunkter.

### 3.4 B-spline

I vissa tillämpningar används mjukt böjda linjer i stället för räta linjer. För detta används bl.a. polynom. Ett polynom av första graden beskriver en rät linje, ett polynom av andra graden en kvadratisk kurva, ett polynom av tredje graden en kubisk kurva, o.s.v. Polynom med mycket höga grader kan beskriva komplicerade kurvor men har egenskaper som bör undvikas, framför allt kan stora fluktuationer mellan punkterna i ytterdelarna av

punktintervallet förekomma. För att lösa problemet används istället delpolynom som anpassas till ett linjesegment i taget. För att undvika abrupta övergångar mellan de olika segmenten ställs det upp villkor om kontinuerliga första- och andraderivator. Förstaderivatan anger lutningen på kurva i en punkt och andraderivatan anger lutningens förändring, därför innebär villkoret om kontinuitet att lutningen på linjen inte skall kunna förändras abrupt någonstans och därmed får hela linjen en jämn form. En kurva uppbyggd av denna typ av delpolynom kallas för spline. En splinefunktion beräknas genom uppsättning av ett ekvationssystem där villkoren utgörs av att funktionen kan, men behöver inte, gå igenom alla punkterna och att det ställs krav på kontinuitet mellan delsträckorna. (Burrough och McDonnell, 1998; Eklundh, 2001)

Innan datorerna användes för att rita mjukt böjda kurvor användes en typ av böjlig linjal av metall eller trä som anpassades till ett antal punkter. På engelska benämndes denna böjliga linjal *spline*. En kurva ritad med en sådan linjal kan beskrivas av ett tredjegradspolynom (ett kubiskt polynom), som är kontinuerligt och har kontinuerliga första- och andraderivator. Ett polynom ges av:

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k \quad (3.9)$$

där  $p(x)$  är det beräknade polynomet,  
 $b_0, b_1, \dots, b_k$  är de koefficienter som skall bestämmas och  
 $k$  är polynomets grad.

Ett polynom som passerar genom  $n$  punkter måste vara av grad  $n-1$ . Ett kubiskt polynom passerar genom fyra punkter och är av grad tre har då formen:

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3. \quad (3.10)$$

Ett kubiskt polynom som anpassas till ett plan kan skrivas som:

$$p(x,y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy + b_4 x^2 + b_5 y^2 + b_6 x^2y + b_7 xy^2 + b_8 x^3 + b_9 y^3. \quad (3.11)$$

B-spline (eng. *basis spline*) är en form av spline, där parametrarna bestäms i endast fyra brytpunkter åt gången som ger möjlighet till lokal kontroll av kurvans form. Traditionella kubiska spline har en nackdel som B-spline inte har; det är att de behöver räknas om i sin helhet även om bara en liten del av linjen ändras. Den totala splinefunktionen är uppbyggd av de ingående delpolynomen. B-splinefunktioner är generellt sett snabbare att beräkna än vanliga kubiska splinefunktioner. (Burrough och McDonnell, 1998; Eklundh, 2001)

Formler för B-splinefunktionen är komplexa. För detaljer hänvisas till t.ex. Foley m.fl. (1990).



### 3.4.1 Egenskaper hos interpolerade ytor

B-spline har kontinuerliga ytor och kontinuerliga derivator. De filtrerar bort tillfälliga fel om de inte går igenom alla mätpunkter.

## 3.5 Interpolering i ett nät av trianglar

Interpolering i ett nät av trianglar är en interpolationsmetod som baseras på oregelbundet fördelade referenspunkter, enkel interpolering samt förhållandevis snabb åtkomst av data. Metoden innehåller tre delar, nämligen skapande av ett triangelnät och lagring i intern struktur för snabb åtkomst av data, samt själva interpoleringen. (Östman, 1995)

### 3.5.1 Triangulering

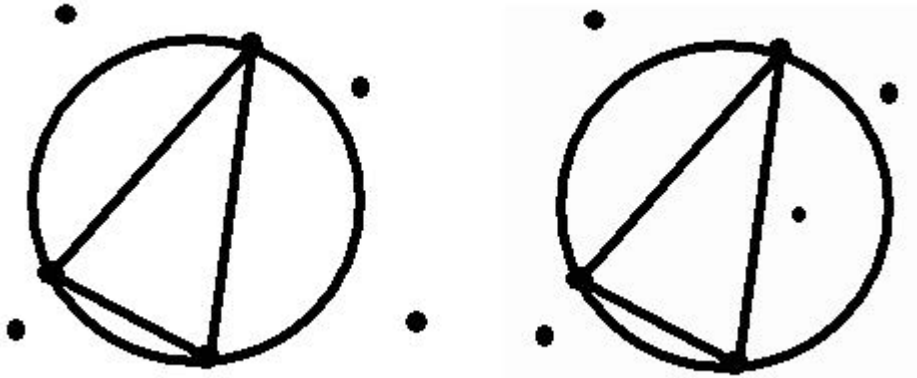
Triangular Irregular Network (TIN, triangelnät) skapades 1978 av Peucker, Fowler och Mark. Den används framför allt för att skapa höjdytor från punktnät. De oregelbundna trianglarna anpassas till punkterna så att fasetter bildas som avspeglar terrängens form. Varje triangel definierar ett plan som går mellan triangelns hörn, vilket innebär att om höjden på mellanliggande punkter i planet skall bestämmas, används linjär interpolering mellan hörnpunkterna. Datapunkternas ursprungsvärden interpoleras inte, utan representeras exakt. (Eklundh, 2001)

Trianglarna är lagrat i en topologisk struktur som har en tabell för ytor (polygoner), en tabell för linjer, en tabell för punkter (koordinater) samt en tabell för nodtopologi. Ett triangelnät har en mycket regelbunden struktur eftersom varje yta har enbart tre sidor. Det innebär att den topologiska strukturen kan förenklas till två tabeller, en för trianglar och en för punkter. (Eklund, 2001; Östman, 1995)

### 3.5.2 Delaunay-triangulering

Delaunay-triangulering är den vanligaste metoden för triangulering. Grundtanken är att försöka minimera influensområdet för varje mätpunkt, d.v.s. det område som punkten ifråga påverkar interpolationen. Därför bör så liksidiga trianglar som möjligt eftersträvas och långsmala spetsiga trianglar undvikas. (Worboys, 1995; Östman, 1995)

En Delaunay-triangel är en triangel där den minsta omslutande cirkeln ej innehåller någon annan mätpunkt (se Figur 3.4). Det finns i princip två olika sätt att skapa Delaunay-trianglar, utifrån-och-in eller inkrementellt. (Östman, 1995)



Figur 3.4 En Delaunay-triangel till vänster och ej Delaunay-triangel till höger.

Utifrån-och-in-algoritmen innebär att alla referenspunkter måste vara kända innan trianguleringen påbörjas. Det första steget innebär att den minsta konvexa polygonen som innesluter samtliga referenspunkter skapas. Nästa steg är att fylla på trianglarna inåt. Varje sida i den konvexa polygonen behöver kompletteras med ytterligare en punkt vardera och den väljs som den punkt som uppfyller Delaunay-villkoret. (Östman, 1995)

Den inkrementella metoden kan både bearbeta punkterna i godtycklig ordning eller slumpmässigt. Att den bearbetar punkterna i godtycklig ordning innebär att samtliga referenspunkter ej behöver vara kända vid processens start. De tre första punkterna bildar den första Delaunay-triangeln. För varje ytterligare referenspunkt som läses in, kontrolleras vilka trianglar som behöver förändras, d.v.s. vilka trianglar som ej uppfyller Delaunay-villkoret. Dessa trianglar uppdateras så att villkoret uppfylls, varefter nästa referenspunkt läses in och algoritmen fortsätter. (O'Rourke, 1993; Östman, 1995)

### 3.5.3 Interpolering

Beräkningen av värdet i en interpolationspunkt består av två steg. För det första så gäller att bestämma vilken triangel som interpolationen skall ske inom. Andra steget är att interpolera värdet i punkten  $p$  (Worboys, 1995):

$$x_p = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 \quad (3.12)$$

där  $x_i$  är vektor i två dimensioner  $(x_i, y_i)$ .

Koefficienterna  $a_1$ ,  $a_2$  och  $a_3$  måste dessutom uppfylla:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \quad (3.13)$$

Ekvationerna 3.12 och 3.13 bildar ett linjärt ekvationssystem med tre villkor och tre obekanta,  $a_1$ ,  $a_2$  och  $a_3$ . När detta löst kan höjden i punkt  $p$  beräknats med:

$$z(x_p) = a_1 \cdot z(x_1) + a_2 \cdot z(x_2) + a_3 \cdot z(x_3) \quad (3.14)$$

### 3.5.4 Egenskaper hos interpolerade ytor

Interpolering i ett nät av trianglar filtrerar inte bort tillfälliga fel och har inte kontinuerliga derivator men den har kontinuerliga ytor.

## 3.6 Kriging

### 3.6.1 Stationära processer

För att statistiskt kunna modellera hur kontinuerliga variabler varierar i rummet har en metod inom geostatistiken utarbetats. Denna metod utgår från antagandet att den rumsliga variationen hos en kontinuerlig variabel i allmänhet är för komplicerad för att modelleras med en enkel matematisk funktion. Den bör i stället behandlas som en stokastisk variabel, d.v.s. en statistisk slumpvariabel. Modellen består av variationen hos variabeln i tre delar (Eklundh, 2001):

$$z(x) = m(x) + \varepsilon'(x) + \varepsilon'' \quad (3.15)$$

där  $z(x)$  är en slumpvariabel i punkt  $x$  (i 1, 2 eller 3 dimensioner),  
 $m(x)$  är en strukturell komponent, d.v.s. ett konstant medelvärde eller en trend,  
 $\varepsilon'(x)$  är en s.k. regionaliserad variabel, vilket är en rumsligt autokorrelerad slumpvariabel och  
 $\varepsilon''$  är ett rumsligt icke autokorrelerat fel (antas oftast vara normalfördelat).

$m(x)$  kan skattas med ett medelvärde för alla punkterna eller med en trendyta.

Under antagandet att ingen trend eller drift förekommer så är den undersökta variabeln stationär. Detta innebär att två villkor måste vara uppfyllda (Lindgren och Rootzén, 2003):

1. Väntevärdet för skillnaden mellan två punkter  $x$  och  $x+h$  med avståndet  $h$  blir noll (Eklundh, 2001):

$$E[z(x) - z(x+h)] = 0 \quad (3.16)$$

där  $z(x)$  är värdet i punkt  $x$ ,  
 $z(x+h)$  är värdet i punkt  $x+h$  i avståndet  $h$  från  $x$  och  
 $E[ ]$  är väntevärdet.

2. Att kovariansen endast är beroende av avståndet och inte av läget.

### 3.6.2 Semivarians

Hur snarlika den undersökta variabelns värden är i två punkter, kan uttryckas i form av en varians. Inom geostatistiken används oftast semivarians (vilken är besläktad med kovariansen):

$$V[z(x) - z(x+h)] = E[\{z(x) - z(x+h)\}^2] = 2\gamma(h) \quad (3.17)$$

där  $\gamma(h)$  betecknar semivariansen och  $V[\ ]$  är variansen.

Kraven på stationaritet innebär att funktionen  $\gamma(h)$  måste vara konstant över hela området. Kravet på isotropi sätts också som ett ytterligare villkor på  $\gamma(h)$ . Detta innebär att funktionen beror endast på avståndet och ej på riktning. (Burrough och McDonnell, 1998; Eklundh, 2001; Östman, 1995)

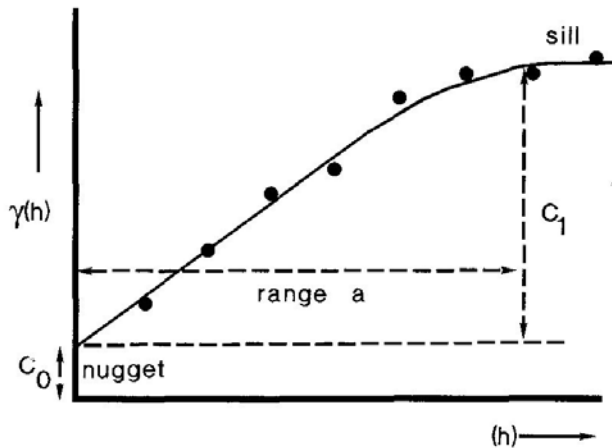
Om ovanstående villkor är uppfyllda kan semivariansen skattas enligt (Eklundh, 2001):

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (3.18)$$

där  $\hat{\gamma}(h)$  är den skattade semivariansen,  
 $m$  är antalet möjliga parvisa jämförelser i materialet,  
 $z(x_i)$  är mätvärdet av attribut  $z$  i punkt  $x_i$  och  
 $h$  är avståndet mellan två punkter (egentligen en avståndsvektor).

Semivarianserna kan ritas upp grafiskt i ett variogram, där  $\gamma(h)$  är en funktion av avståndet  $h$  (se Figur 3.5).

Ett variogram ger värdefull information om den rumsliga autokorrelationen för den undersökta variabeln. Utanför range (se Figur 3.5) avtar lutningen och semivariansen blir nästan konstant, detta tolkas så att range är det längsta avståndet för vilket det finns ett rumsligt beroende i materialet. Punkter som ligger utanför range kan inte bidra till interpolationen med någon värdefull information, därför skall storleken på sökfönstret i t.ex. viktad medelvärdesinterpolation av variabeln inte överstiga värdet på range. Den avläsning som görs av semivariansen på detta avstånd benämns sill. Lutningen på en funktion som anpassas till punkterna fram till sill är ett mått på styrkan i det rumsliga beroendet. Ju högre lutning på kurvan, desto snabbare ökar semivariansen med avståndet. Om kurvan är helt flack har en ökning av avståndet ingen inverkan på semivariansen. Om funktionen extrapoleras bakåt till y-axeln ses att den korsar y-axeln lite ovanför nollpunkten. Punkten där funktionen korsar y-axeln benämns nugget och semivariansen utgörs där av residualvariation, d.v.s. rumsligt icke autokorrelerad variation eller brus ( $\epsilon''$ ). Denna variation kan tolkas som ett resultat av det slumpmässiga fel som finns i data och benämns nugget. Om mycket stor del av semivariansen utgörs av nugget är den slumpmässiga variationen så hög att interpolation av data är meningslös med kriging-interpolation (se avsnitt 3.6.3) och  $z(x)$  kan skattas med medelvärdet för alla punkterna. (Eklundh, 2001)



Figur 3.5 Variogram där semivariansen  $\gamma(h)$  är en funktion av avståndet  $h$ . Nugget är  $c_0$ , sill är  $c_0+c_1$  och range  $a$  är avståndet till sill. (Burrough och McDonnell, 1998, s. 135, bearbetad)

För lättare kunna genomföra beräkningar på variogrammen, brukar semivariansen anpassas till någon form av funktion. De vanligaste funktionerna är (Burrough och McDonnell, 1998):

sfärisk modell: 
$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ c_0 + c_1(3h/2a - h^3/2a^3) & 0 < h < a \\ c_0 + c_1 & h \geq a \end{cases} \quad (3.19)$$

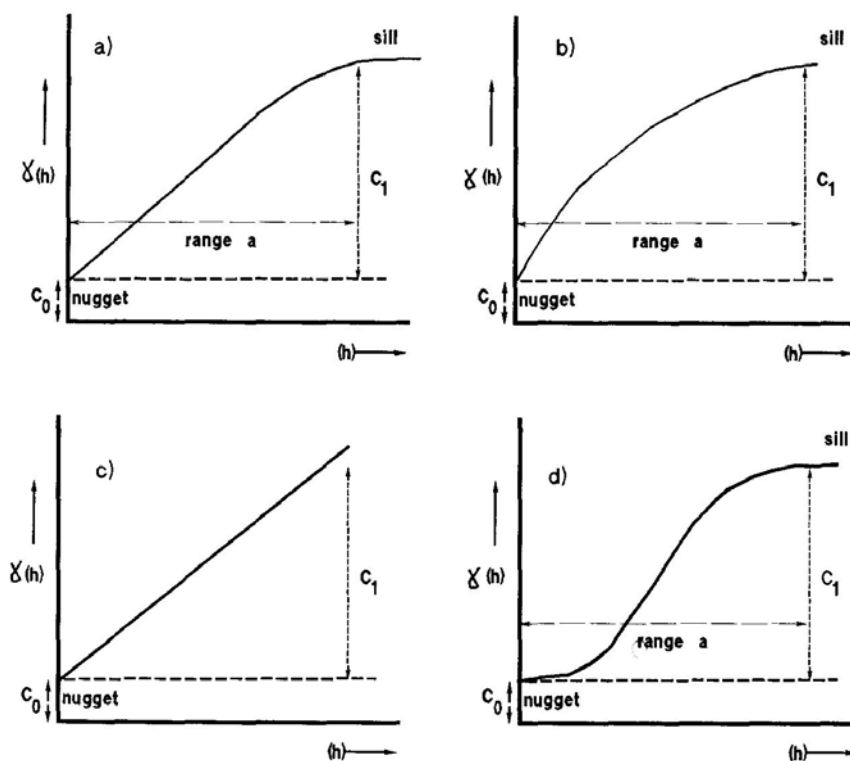
exponentiell modell: 
$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ c_0 + c_1(1 - \exp(-h/a)) & 0 < h \end{cases} \quad (3.20)$$

linjär modell: 
$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ c_0 + bh & 0 < h < a \\ c_0 + ba & h \geq a \end{cases} \quad (3.21)$$

och Gaussisk modell: 
$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ c_0 + c_1(1 - \exp(-h^2/a^2)) & 0 < h \end{cases} \quad (3.22)$$

där  $a$  är range,  
 $b$  är lutningen på linjen (i linjära modellen),  
 $c_0$  är nugget,  
 $c_0 + c_1$  är sill och  
 $h$  är avståndet.

I Figur 3.6 ses de fyra vanligaste funktionerna för att underlätta beräkningarna på variogrammen.



Figur 3.6 De fyra vanligaste variogrammodellerna: a) sfärisk, b) exponential, c) linjär och d) Gaussisk. (Burrough och McDonnell, 1998, s. 136, bearbetad)

### 3.6.3 Kriging-interpolation

Kriging är en interpolationsmetod som har fått sitt namn efter en sydafrikansk gruvingenjör vid namn D. G. Krige. Den bygger på semivariogrammet. Krige använde metoden för att bestämma koncentrationen av guld utifrån stickprovsdata.

Punktviss kriging (eng. *ordinary kriging*) är den enklaste formen av kriging och vars process är ganska lik den i avståndsviktad medelvärdesinterpolation. Skillnaden ligger i att vikterna har sitt ursprung i geostatistiska analyser. Allmänna interpolationsmetoden i ekvation 3.1 kan formuleras som (Burrough och McDonnell, 1998):

$$z(x_p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z(x_i) \quad (3.23)$$

där  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ,  
 $z(x_p)$  är det interpolerade värdet,  
 $z(x_i)$  är värdet för mätpunkt  $i$  och  
 $n$  är antalet mätpunkter.

Vikterna  $\lambda_i$  väljs så att interpolerade värdet  $z(x_p)$  är väntevärdesriktigt och den uppskattade variansen  $\sigma_e^2$  är mindre än alla andra linjära kombinationer av

de observerade värdena. Optimala vikter fås genom att minimera  $\sigma_e^2$  med avseende på vikterna  $\lambda_i$  (Burrough och McDonnell, 1998):

$$\sigma_e^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_p) + \phi \quad (3.24)$$

och uppnås när:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_j) + \phi = \gamma(x_j, x_p) \text{ för alla } j. \quad (3.25)$$

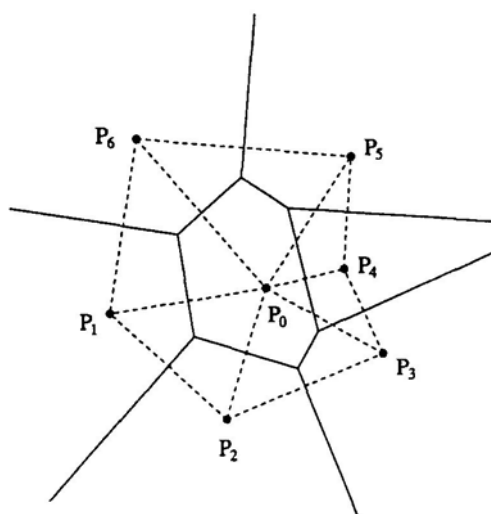
Kvantiteten  $\gamma(x_i, x_j)$  är semivariansen av  $z$  mellan mätpunkterna  $i$  och  $j$ ,  $\gamma(x_i, x_p)$  är semivariansen mellan mätpunkten  $i$  och interpolerade punkten  $p$ . Båda kvantiteterna fås från variogrammet. Kvantiteten  $\phi$  är Lagranges multiplikator som behövs för minimering. (Burrough och McDonnell, 1998)

### 3.6.4 Egenskaper hos interpolerade ytor

Kriging-interpolation filtrerar bort tillfälliga fel men har varken kontinuerliga ytor eller kontinuerliga derivator.

## 3.7 Närmaste-granne-interpolation m.h.a. Voronoi-diagram

Voronoi-diagram (även kallade Dirichlet-celler eller Thiessen-polygoner) används för att dela in ett område i oregelbundna homogena ytor bildade kring en mängd punkter (se Figur 3.7). Voronoi-diagram skapas genom att en linje (mittpunktsnormal) dras i rät vinkel mot en tänkt linje mitt emellan par av punkter. Normalerna dras ut tills de ansluter till varandra och knyts ihop där. Den av mittpunktsnormalerna till en punkt som ligger närmast punkten bildar den punktens polygongräns. Linjerna mellan punkterna bildar Delaunay-trianglar. (Burrough och McDonnell, 1998; Eklundh, 2001)



Figur 3.7 Voronoi-diagram ur Delaunay-trianglar. (Sugihara, 1999, s. 54)

Dessa oregelbundna homogena ytor eller polygoner definierar den yta som ligger närmast den punkt polygonen är bildad runt. Voronoi-diagram möjliggör närmaste-granne-interpolationsmetoden genom att polygonerna tilldelas det värde som deras mittpunkt har. (Eklundh, 2001)

### 3.7.1 Egenskaper hos interpolerade ytor

Närmaste-granne-interpolation filtrerar inte bort tillfälliga fel och har inte kontinuerliga ytor.

## 3.8 Översikt om metoderna

I avsnitt 2.7.4 finns två egenskaper som är önskvärda hos en interpolationsmetod. Dessa är att filtrera bort tillfälliga fel i observationspunkter som ligger till grund för korrektionsmodellen samt att skapa kontinuerliga ytor och kontinuerliga derivator.

I Tabell 3.1 ses att endast punktvis kriging och avståndsviktad medelvärdesinterpolation filtrerar alltid bort tillfälliga fel och att endast B-spline har både kontinuerliga ytor och derivator. Voronoi-diagram har ingen av de två egenskaperna.

Tabell 3.1 Interpolationsmetoder och deras egenskaper.

<i>Interpolationsmetod</i>	<i>Filtrerar bort tillfälliga fel</i>	<i>Kontinuerliga ytor</i>	<i>Kontinuerliga derivator</i>
Avståndsviktad medelvärdesinterpolation	Ja	Nej	Nej
Bilinjär interpolation	Nej	Ja	Nej
B-spline	Nej/Ja	Ja	Ja
Triangelnät	Nej	Ja	Nej
Punktvis kriging	Ja	Nej	Nej
Närmaste-granne-interpolation	Nej	Nej	Nej

## 3.9 Val av interpolationsmetod för numeriska tester

Följande interpolationsmetoder väljs för att utföra numeriska tester:

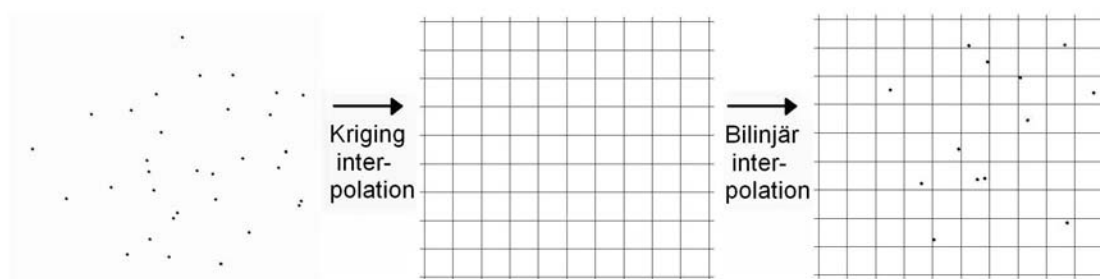
- Interpolering i triangelnät (Delaunay-trianglar) på mätpunkter,
- Kriging-interpolation följt av bilinjär interpolation (se Figur 3.8).



Anledningen att dessa interpolationsmetoder väljs är:

- de har bra egenskaper,
- interpolering i triangelnät (Delaunay-trianglar) används idag,
- tillgång till programvara som utför dessa interpolationsmetoder, och
- ej tillgång till program för B-spline interpolation.

Med en kombinerad av kriging-interpolation och bilinjär interpolation används först en komplicerad interpolationsmetod som filtrerar bort tillfälliga fel. Sen följer bilinjär interpolation som ger kontinuerliga ytor och är enkel metod för användaren att utföra.



Figur 3.8 Utifrån ett antal mätpunkter skapas jämnt rutnät med kriging-interpolation; nya punkter interpoleras sedan med bilinjär interpolation i rutnätet.

## 4 Numeriska tester

### 4.1 Syfte

Syftet med numeriska tester är att jämföra kriging-interpolation och bilinjär interpolation med interpolering i triangelnät för restfelshantering både på nationell nivå och lokal nivå.

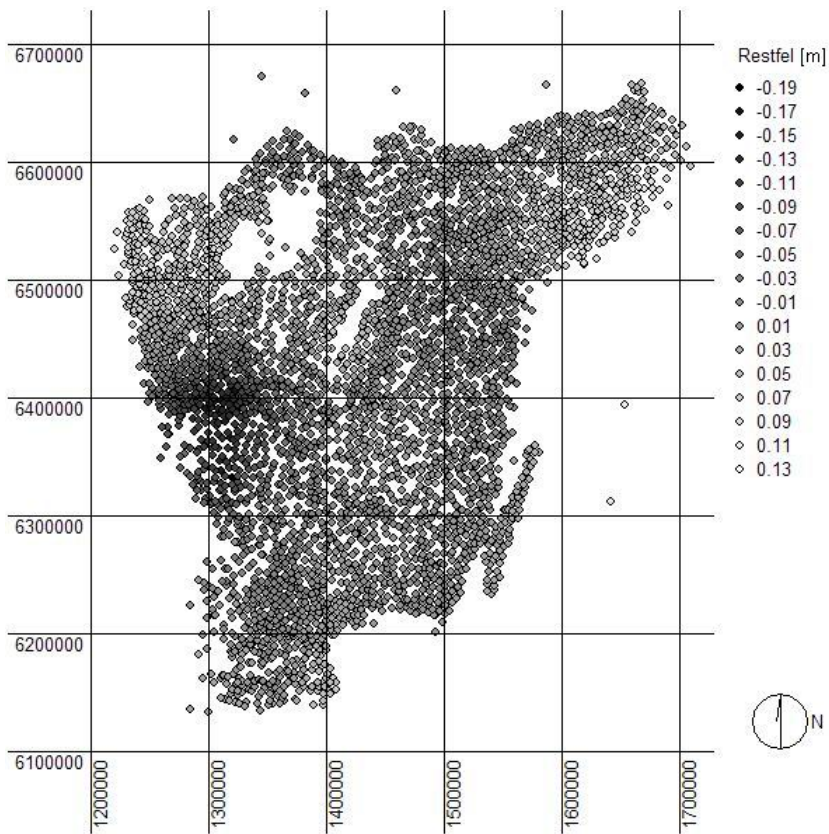
### 4.2 Data

Till denna studie erhöles data från I-divisionen Geodesi, Lantmäteriet (viss data kommer ursprungligen från Borås kommun). Beskrivning av data bygger på uppgifter från Reit (2004).

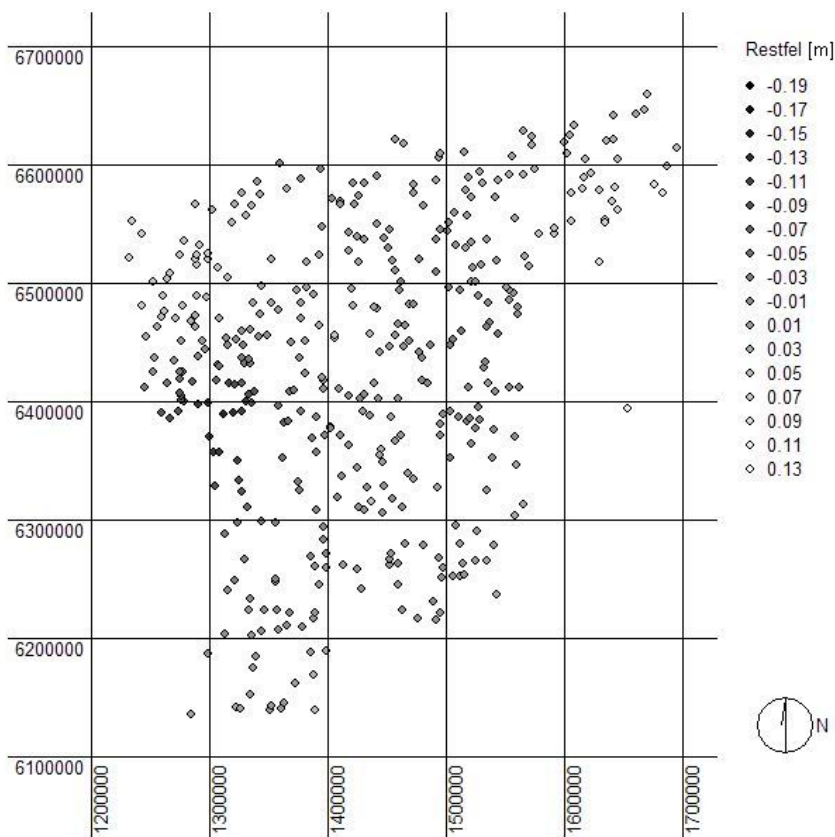
#### 4.2.1 Nationell nivå

Vid beräkning på nationell nivå användes 4 057 mätpunkter från Lantmäteriet (se Figur 4.1) med kvarstående höjdfel efter att höjdkorrekturen enligt SWEN 01L hade påförts. Alla punkterna kommer från samma utjämning. Restfelens samtliga fyra komponenter, d.v.s. RH 70-höjder, landhöjnings-

modell, SWEREF 99-höjder och NKG 96, har tillkommit genom någon form av utjämningsförfarande. Av dessa 4 057 punkter valdes 400 slumpmässiga punkter (se Figur 4.2) som utvärderingspunkter för att kontrollera interpoleringen. De övriga 3 657 punkter användes för att skapa gitter i kriging-interpolationsmetoden (se avsnitt 4.3.2) och TRIAD-bas i Gtrans (se avsnitt 4.4.2). Av 4 057 punkter är 3 366 mätta med GPS och 691 med avvägning. 269 punkter har höjder i RH B 70 och 3 788 har höjder i RH 70. Vid beräkningen användes koordinater i RT 90 2,5 gon V.



Figur 4.1 De 4 057 mätpunkter som användes.

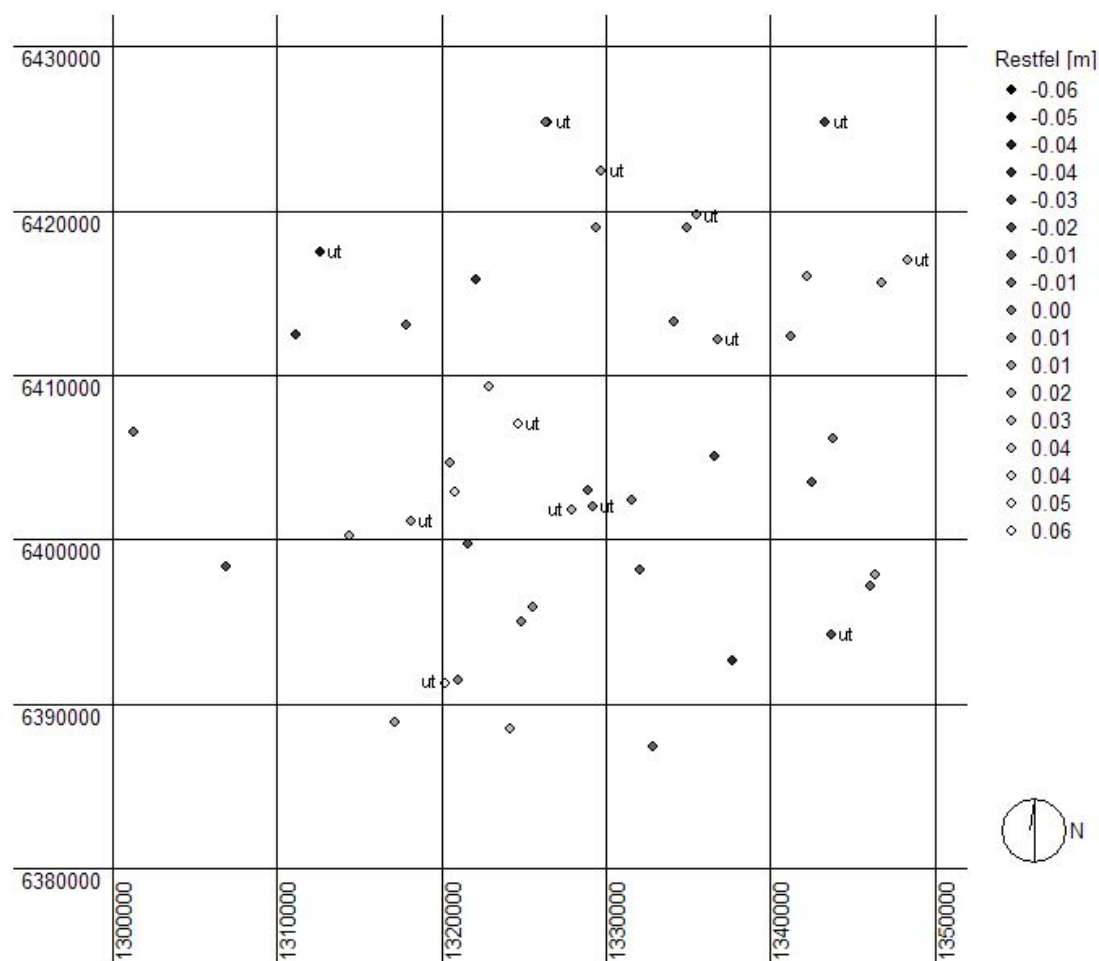


Figur 4.2 De 400 utvärderingspunkterna.

## 4.2.2 Lokal nivå, Borås kommun

På lokal nivå hade Lantmäteriet tillgång till data från tre kommuner. Efter granskning visade sig att data från Borås kommun var lämpligast för denna studie, både m.h.t. antal punkter och restfel.

Vid beräkningen användes 32 mätpunkter och 13 utvärderingspunkter från Borås kommun (se Figur 4.3). Borås kommun använder höjdsystemet RH 70. Mätpunkterna användes för att skapa gitter i kriging-interpoleringen och TRIAD-bas i Gtrans och utvärderingspunkterna för jämföring mellan de olika interpoleringsmetoderna. Av de 32 mätpunkterna är 12 mätta med GPS och 20 med avvägning. 16 punkter ingår i RIX 95, varav 4 har hållits fast i RH 70 och 10 har erhållits efter utjämning av GPS-mätningar. 14 punkter har höjder i RH 70 och 2 punkter i RH B 70. Alla utvärderingspunkterna har avvägda höjder i RH B 70. RH 70-höjderna har fått sina tillfälliga fel filtrerade genom utjämning. Där finns inget som tyder på restfelen i punkterna skulle vara korrelerat med läget. Vid beräkning användes koordinater i RT 90 2,5 gon V.



Figur 4.3 De 32 mätpunkter i Borås kommun samt 13 utvärderingspunkter (betecknat ut).

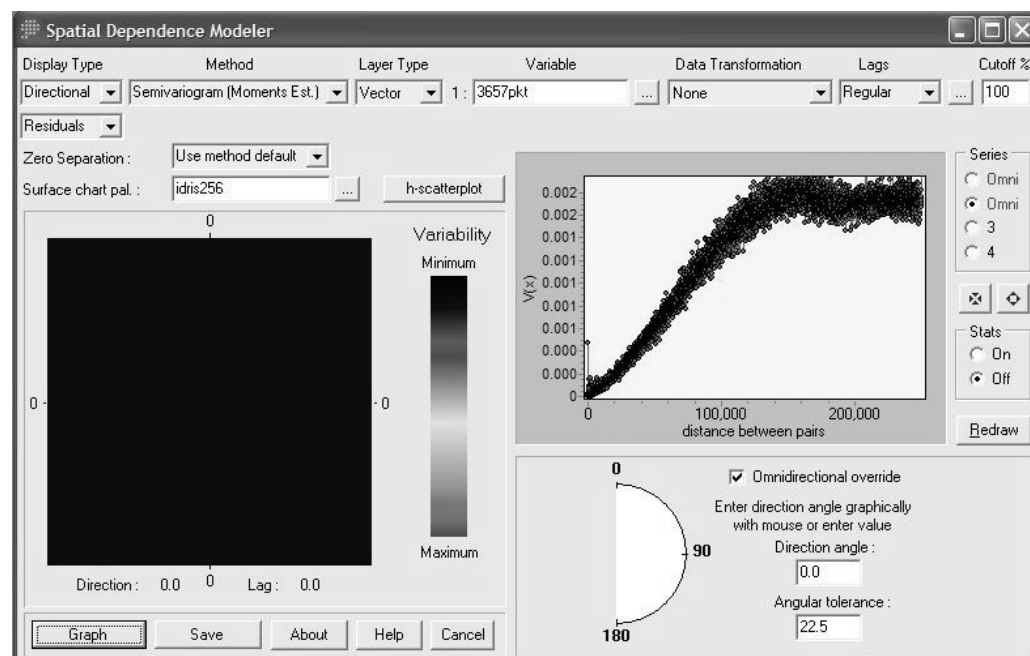
## 4.3 Metod - Kriging-interpolation och bilinjär interpolation

### 4.3.1 Program

Kriging-interpolationen utfördes i Idrisi32. Idrisi32 är ett program som är tillverkad hos Clark Labs som är forskningscentrum vid George Perkins Marsh Institute vid Clark University i USA. Idrisi används för geografiska analyser, först och främst med rasterformat. Bilinjär interpolationen utfördes med eget program implementerat i Microsoft Excel.

### 4.3.2 Utförande

Första steget i kriging-interpolation i Idrisi32 är att importera de punktlistor som skall användas. Andra steget är att skapa semivariogram i Spatial Dependence Modeler (se Figur 4.4) med följande inställningar: Directional under *Display typ*, Semivariogram (Moments Est.) under *Method*, punktlistan under *Variable*, Regular under *Lags* samt information om antal lag (här används 3 000 lag på nationell nivå och 60 lag på lokal nivå) och lagavstånd (50 m på nationell nivå respektive 1 000 m på lokal nivå), *Cutoff* sätts till 100 % (inkluderar alla lagavstånd) samt markerat i rutan för *Omnidirectional override* (gör att ett isotopt semivariogram beräknas, se Figur 3.5). Genom att trycka på Graph fås en graf där semivariansen är på y-axeln och avståndet mellan par är på x-axeln, denna graf kan sparas.



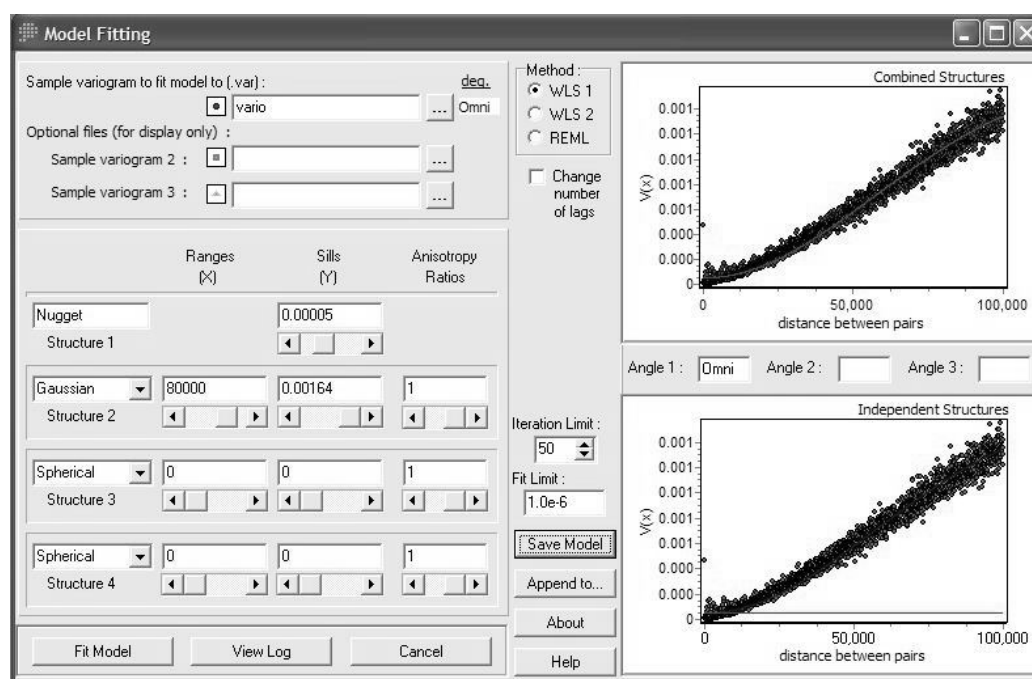
Figur 4.4 Spatial Dependence Modeler för att skapa semivariogram i Idrisi.

I tredje steget importeras semivariogrammet från steg två i modell-anpassningen (eng. *Model fitting*) för att anpassa en modell till semivariogrammet (se Figur 4.5). Under *Sample variogram to fit model* ges

namnet på semivariogrammet. I *Structure 1* ges värdet på nugget och i *Structure 2* ges typen av modell som skall användas samt värden på range och sill. När modellen har anpassats så bra som möjligt kan den sparas. I Tabell 4.1 ges värden på nugget, sill och range för modellenpassningen både på nationell nivå och på lokal nivå samt modelltypen.

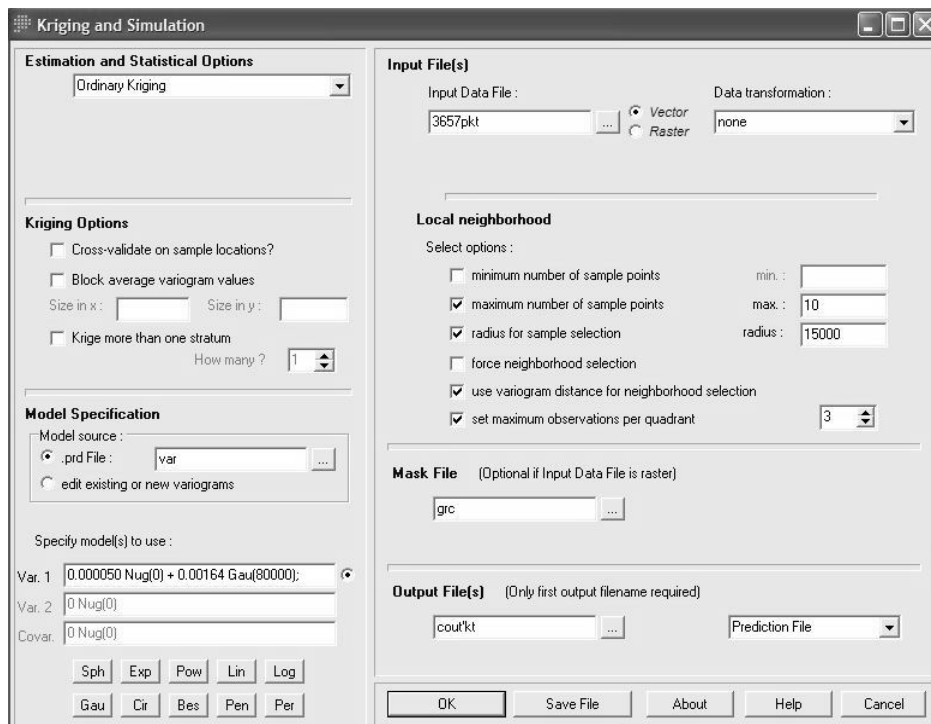
Tabell 4.1 Värden på nugget, sill och range för modellenpassningen på nationell och lokal nivå samt modelltypen.

	Modell	Nugget [m <sup>2</sup> ]	Sill [m <sup>2</sup> ]	Range [m]
Nationell nivå	Gaussisk	0,000 050	0,001 690	80 000
Borås kommun	Sfärisk	0,000 050	0,000 450	14 000



Figur 4.5 Modellanpassning för att anpassa ett modell till semivariogrammet.

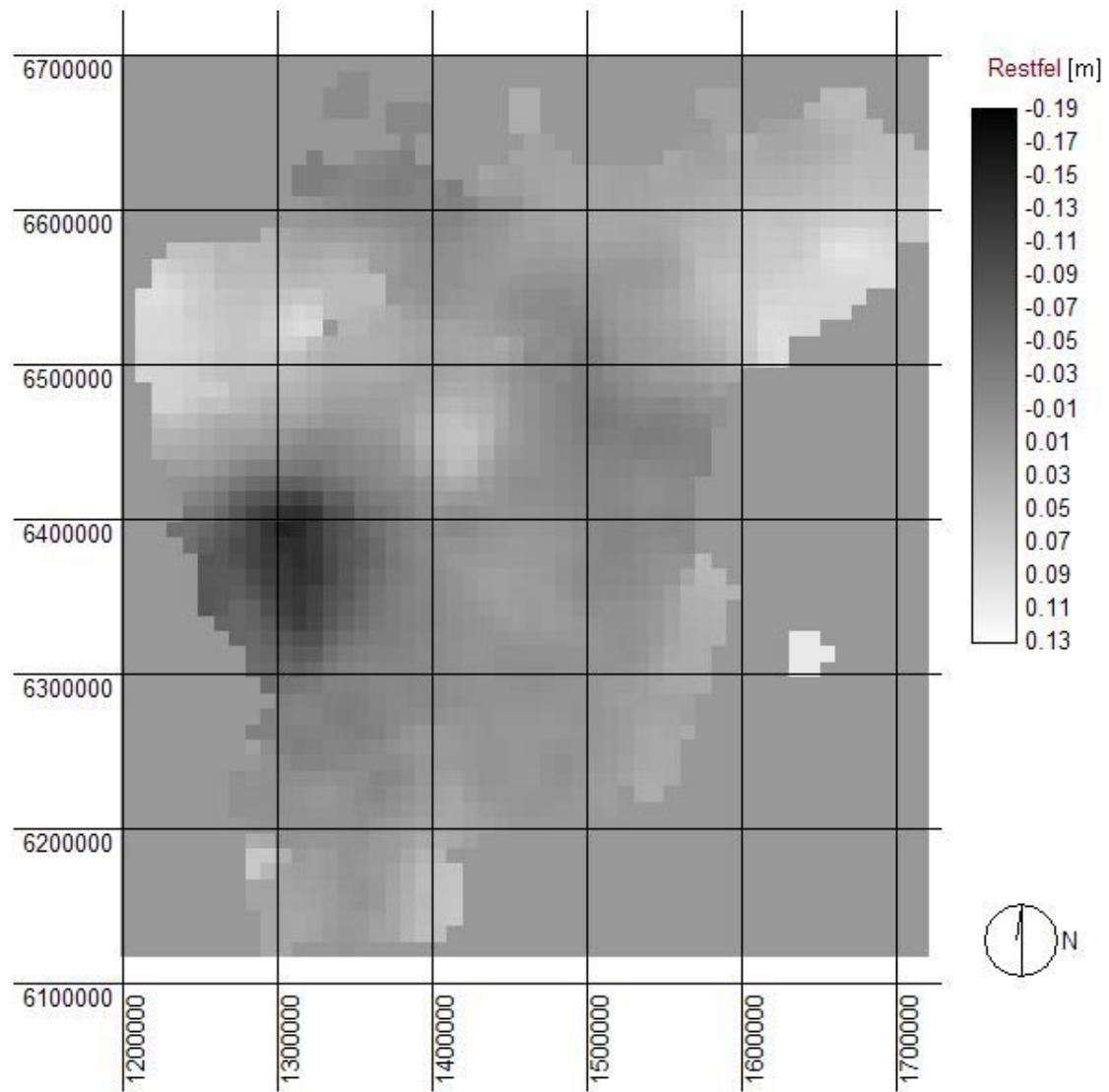
Fjärde och sista steget i kriging-interpolation är att skapa ett gitter (en rasterbild, se Figur 4.7, Figur 4.8 och Bilaga 2) som bygger på semivariogrammet och den punktlista som importerades i steg 1. I Kriging and Simulation (se Figur 4.6) användes följande inställningar: Ordinary kriging under *Estimation and Statistical Options*, namnet på semivariogrammodellen under *Model Specification* (se värden i Tabell 4.1), namnet på punktlistan från steg 1 under *Input File(s)*, under *Local neighborhood* används värden i Tabell 4.2, under *Mask file* ges maskfil med tillhörande rasterstorlek, till sist ges namnet på rasterbilden under *Output File(s)*. Varje raster tar sitt värde i mittpunkten av rastret. I Tabell 4.2 finns information angående de rasterbilder som interpolerades på nationell och lokal nivå med kriging-interpolation.



Figur 4.6 Kriging och Simulering för att skapa rasterbild utifrån punktlistan som importerades i steg 1 och modellen som skapades i steg 3.

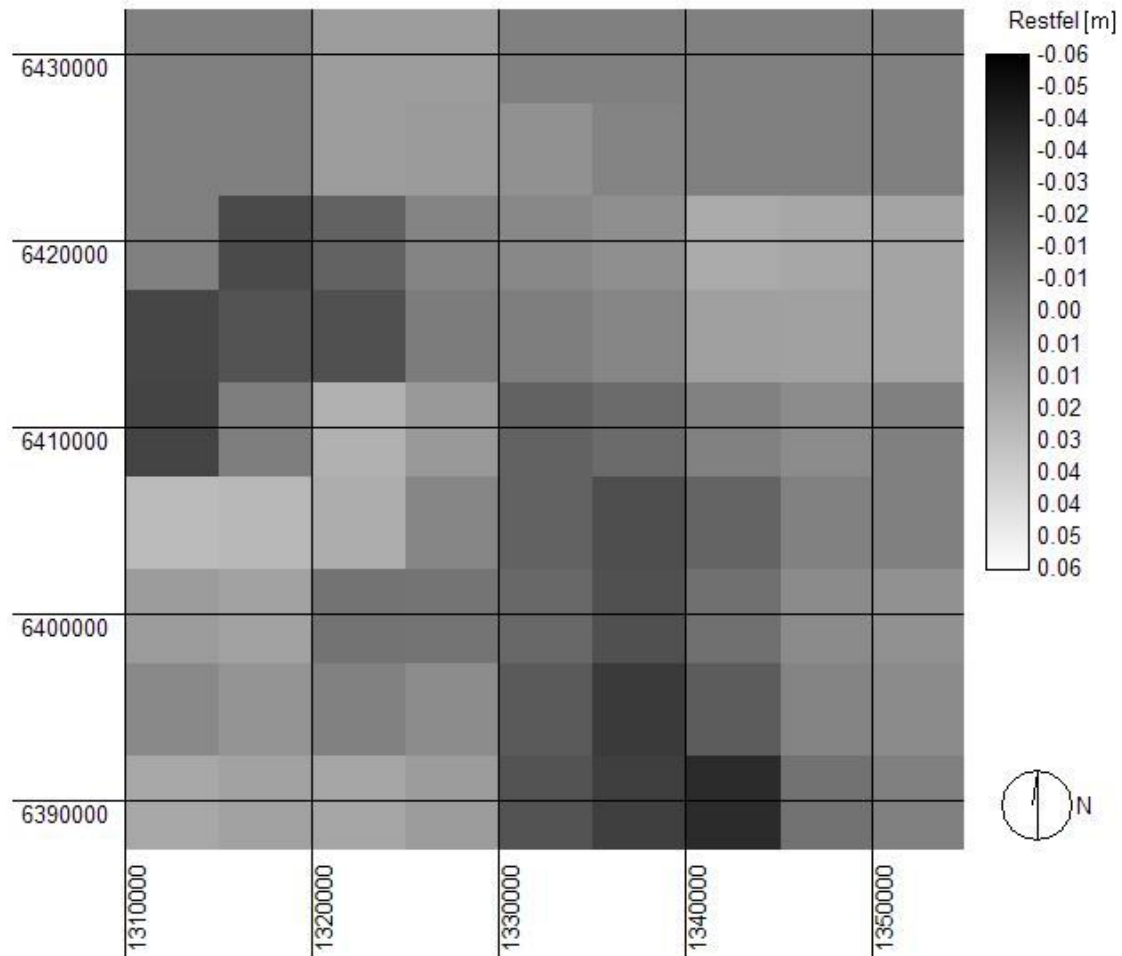
Tabell 4.2 Jämförelse mellan de rasterbilder som skapades på nationell och lokal nivå med kriging-interpolering.

Namn	Rasterstorlek [km]	Sökradie [km]	Max antal punkter i interpolering	Max antal punkter per kvadrant
Nationell 10 km	10	15	10	3
Nationell 20 km	20	30	10	3
Nationell 30 km	40	60	10	3
Borås 4 km	4	6	10	3
Borås 5 km	5	7,5	10	3
Borås 7,5 km	7,5	11,25	10	3
Borås 10 km	10	15	10	3



Figur 4.7 Nationell nivå, 10 km raster.





Figur 4.8 Borås kommun, 5 km raster.

Utifrån rasterbilderna interpoleras ett värde fram för var och en av utvärderingspunkterna med bilinjär interpolation (se avsnitt 3.3). Interpoleringen beräknas i Microsoft Excel.

Efter interpoleringen jämförs de interpolerade värdena med de riktiga värdena i utvärderingspunkterna. Felet i varje punkt är då riktiga värdet subtraherat med det interpolerade värdet. Summa fel, medelvärde, standardavvikelse och varians samt största negativa och positiva fel för varje interpolation räknades och ges i Tabell 4.3 och Tabell 4.4 för interpolering på nationell nivå respektive lokal nivå (i Borås kommun).

## 4.4 Metod - Interpolering i triangelnät

### 4.4.1 Program

Gtrans är ett transformationsprogram som är utvecklat av Lantmäteriet för koordinattransformationer. I Gtrans finns bl.a.:

- GPASS som är ett program för beräkning av parametrar för koordinattransformation i planet genom inpassning mellan två plana

koordinatsystem. Inpassning i höjd kan även utföras i samma beräkning. Restfel och grundmedelfel beräknas.

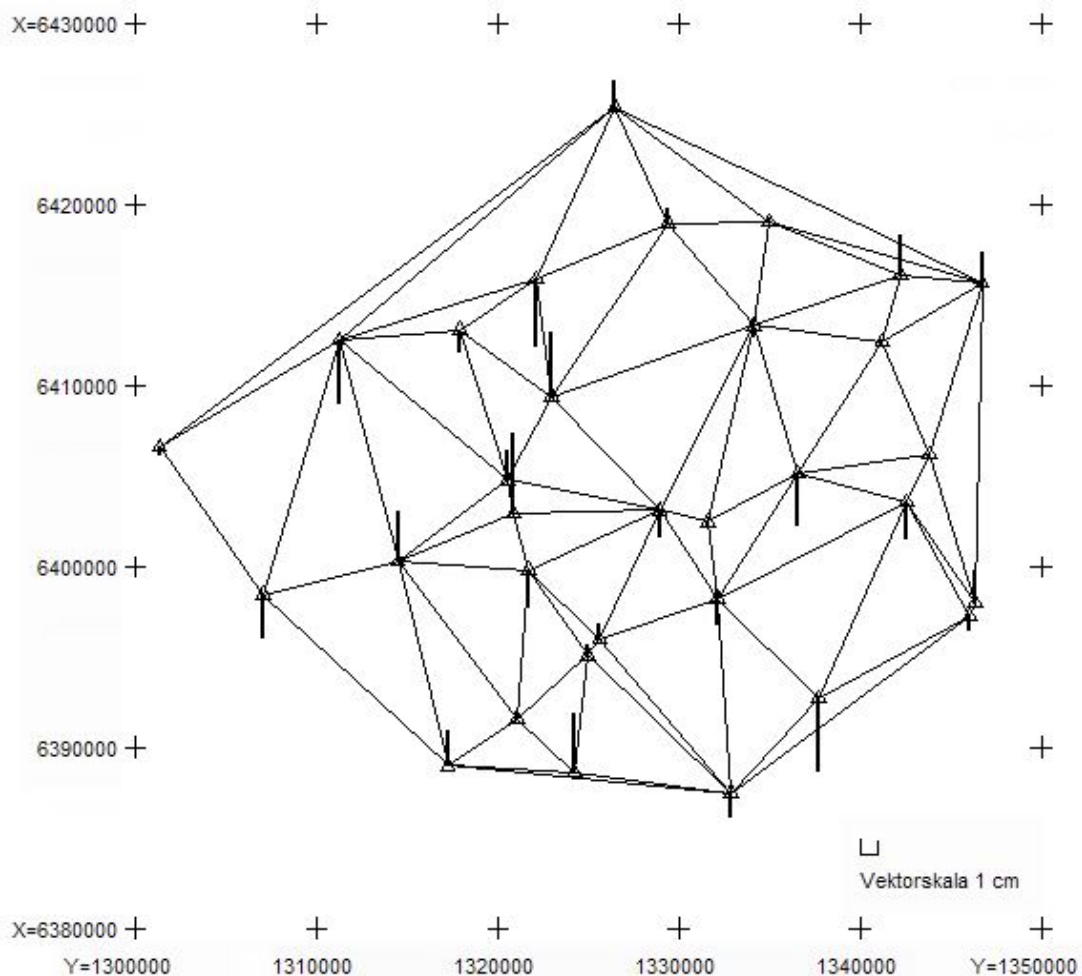
- GPLOT som kan rita ut punkter och restfelsvektorer i bildformat, vektorformat eller ett internt format för GPLOT.
- GRIDFIL som används för bilinjär interpolation i ett gitter (rutnät).
- TRANSFORMATION som används för att transformera en koordinatfil från ett koordinatsystem till ett annat koordinatsystem.
- TRIAD som skapar triangulering (en TRIAD-bas) över mätpunkterna där restfelen i punkterna interpoleras för att få bättre lokal anpassning. TRIAD använder Delaunay-triangulering (se avsnitt 3.5.2) för att skapa trianglarna.

Gtrans kan användas för linjär och bilinjär interpolation i trianglar och grid. I Gtrans finns 5 geoidmodeller, SWEN 01L, SWEN 98L, SWEN 95, RN 92 och NKG 89 lagrade som gridfiler.

#### **4.4.2 Utförande**

Interpolering av utvärderingspunkter med hjälp av triangelnät utförs i några steg. I första steget skapas en K-fil, ett textbaserat format för koordinatfiler utvecklat av Lantmäteriet, med mätpunkterna och en med utvärderingspunkterna. I andra steget skapas en TRIAD-bas med Delaunay-triangulering (se Figur 4.9). I tredje steget interpoleras ett värde fram för var och en av utvärderingspunkterna. Linjär interpolering i ett nät av trianglar (se avsnitt 3.5.3) utförs i Transformation med hjälp av en TF-fil, ett textbaserat format för transformationsfiler utvecklat av Lantmäteriet, som innehåller information om från vilket koordinatsystem punkterna kommer och till vilket koordinatsystem de skall transformeras samt anrop till TRIAD-basen.

Jämförelse mellan de interpolerade värdena och de riktiga värdena i utvärderingspunkterna utfördes på samma sätt som i avsnitt 4.3.2.



Figur 4.9 TRIAD-bas för mätpunkter (markerade med  $\Delta$ ) i Borås kommun samt deras restfel. Restfelen specificeras med ett fet streck som börjar i mätpunkten. Går strecket uppåt är restfelen positiv, annars negativ.

## 4.5 Resultat

### 4.5.1 Nationell nivå

I Tabell 4.3 här nedan jämförs de tre olika kriging och bilinjära interpolationerna med den linjära interpoleringen i ett nät av trianglar. Som jämförelse ger även tabellen information om att ingen korrektion har gjorts.

Tabell 4.3 Jämförelse av interpolationsresultat på nationell nivå.

Namn	Summa fel [m]	Medelvärde [m]	Standardavvikelse [m]	Varians [m <sup>2</sup> ]	Max negativ fel [m]	Max positiv fel [m]
Ingen korrektion	-0.340	-0.0008	0.0388	0.001504	-0.140	0.106
Kriging och bilinjär 10 km	0.519	0.0013	0.0087	0.000075	-0.045	0.106
Kriging och bilinjär 20 km	0.237	0.0006	0.0085	0.000072	-0.027	0.106
Kriging och bilinjär 40 km	-0.010	0.0000	0.0101	0.000102	-0.032	0.088
Triangelnät	0.118	0.0003	0.0059	0.000035	-0.018	0.053

## 4.5.2 Lokal nivå

I Tabell 4.4 här nedan jämförs de fyra olika kriging och bilinjära interpolationer med linjär interpoleringen. Som jämförelse ger även tabellen information om att ingen korrektion har gjorts.

Tabell 4.4 Jämförelse av interpolationsresultat på lokal nivå, i Borås kommun.

Namn	Summa fel [m]	Medelvärde [m]	Standardavvikelse [m]	Varians [m <sup>2</sup> ]	Max negativ fel [m]	Max positiv fel [m]
Ingen korrektion	0.121	0.0093	0.0310	0.000963	-0.050	0.055
Kriging och bilinjär 4 km	0.114	0.0088	0.0214	0.000458	-0.032	0.041
Kriging och bilinjär 5 km	0.116	0.0089	0.0223	0.000497	-0.031	0.039
Kriging och bilinjär 7,5 km	0.118	0.0091	0.0229	0.000522	-0.041	0.038
Kriging och bilinjär 10 km	0.137	0.0105	0.0255	0.000649	-0.044	0.048
Triangelnät	0.038	0.0029	0.0309	0.000954	-0.055	0.048

## 5 Diskussion

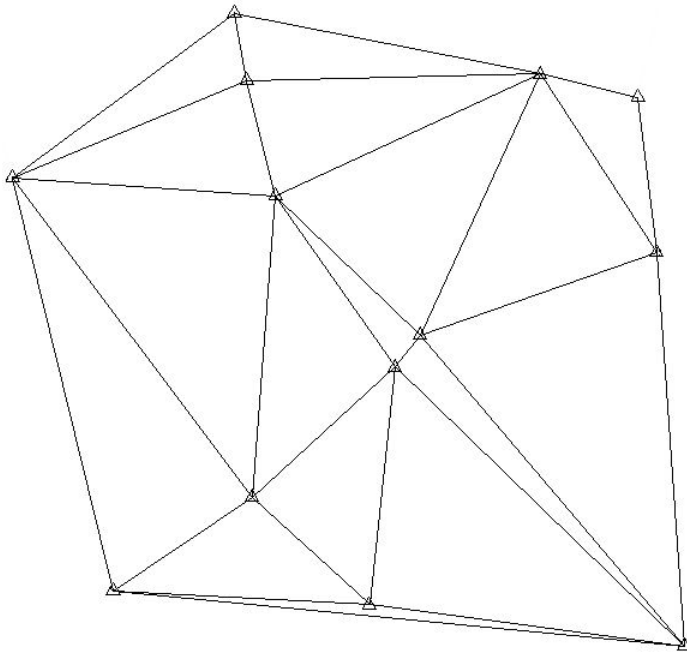
### 5.1 Resultaten av de numeriska testerna

I Tabell 4.3 jämförs resultatet på nationell nivå för fyra olika kriging och bilinjär interpolationer med linjär interpolation i Delaunay-triangular. Som jämförelse ger även tabellen information om resultat om ingen korrektion har gjorts. Standardavvikelsen och variansen för både kriging-interpolation och bilinjär interpolation och linjär interpolation i Delaunay-triangular är mycket lägre än om ingen korrektion hade påförts. Linjär interpolation i Delaunay-triangular ger lägre standardavvikelse än kriging-interpolation och bilinjär interpolation. Av de tre kriging och bilinjär interpolationer ger 20 km gitter bästa resultatet men 10 km ger resultat som ligger ganska nära. 40 km gitter ger sämsta resultatet av dessa tre. Största positiva felet i 10 km och 20 km gitter på nationell nivå är 0.106 m som beror på att en av två punkter från Gotland blev utvärderingspunkt. Eftersom punkterna på Gotland ligger långt ifrån varandra och långt ifrån andra mätpunkter blev punkterna i gittret omkring utvärderingspunkten nollor. Om den inte tas med så är största positiva felet 55 mm.

Resultatet på lokal nivå ges i Tabell 4.4. Resultatet av den linjära interpolationen i Delaunay-trianglar är i stort sätt detsamma som om ingen korrektion hade påförts över huvud taget. Kriging-interpolation och bilinjär interpolationerna ger bättre resultat än linjär interpolation i Delaunay-trianglar. Bästa resultatet ger kriging-interpolation och bilinjär interpolation med 4 km gittertätthet men både 5 km och 7,5 km gitter ligger ganska nära. Sämsta resultatet av dessa fyra kriging och bilinjära interpoleringar ger 10 km gitter. Som ses på Figur 4.3 ligger en del av utvärderingspunkterna utanför mätpunkterna. I Gtrans används då extrapolation mellan de två närmaste randpunkterna som kan påverka resultatet.

Gittertättheten spelar roll för resultatet i kriging-interpolation. Med tätare gitter fås ofta fram lokala variationer som möjligtvis inte avspeglas tillräckligt väl i glesare gitter. I detta examensarbete sätts sökradien i kriging-interpolationen 1,5 gånger större än gittertättheten (rasterstorleken). Detta betyder att ju tätare gitter, desto mindre sökradie och färre punkter som används i kriging-interpolationen. Eftersom punkterna ligger ganska sprida så närmar interpoleringen närmaste-granne-interpolation när sökradien är liten och utjämnningen blir liten. När sökradien blir större bygger interpoleringen på fler punkter som ger mer utjämnning särskilt när variationen i mätpunkterna är stor.

Som ses här ovan är resultatet på nationell respektive lokal nivå olika. Skillnaden i data mellan nationell nivå respektive lokal nivå är att restfelens samtliga fyra komponenter (RH 70-höjder, landhöjningsmodell, SWEREF 99 och NKG 96) på nationell nivå har tillkommit genom någon form av utjämningsförfarande. Dessutom kommer alla punkterna på nationell nivå från samma utjämnningar vilket troligen är orsaken till att alla korrektionsmodellerna är så framgångsrika. Vid bestämning av stompunkter, i plan eller höjd, görs alltid fler mätningar än vad krävs för enkel punktbestämning. Eftersom mätningar inte kan göras helt felfria medför de övertagliga mätningarna motsägelser. Utjämnningens uppgift är att fördela tillfälliga fel, som uppkommer vid mätningar, på ett optimalt sätt (se Figur 5.1). På lokal nivå har RH 70 höjderna fått sina tillfälliga fel filtrerade genom utjämnning. Teoretisk sett är kriging-interpolation bättre om felen är okorrelerade.



*Figur 5.1 Utjämning av tillfälliga fel i mätpunkter i ett stornät där varje mätning har sin vikt.*

Vid transformering av ett höjdgitter från ett plankoordinatsystem till ett annat kan uppkomma ett problem. Problemet är att höjddifferenser mellan närliggande punkter inte stämmer så bra överens. Överensstämelsen verkar vara sämst när båda punkterna ligger i samma ruta i den ena interpolationsmodellen men i olika i den andra. Geografiskt sett verkar det som största problemet finns i områden där själva geoidytan byter krökning. På grund av detta har kravet på kontinuerlig förstaderivata sätts in.

I Tabell 3.1 ses att endast B-spline interpolation har kontinuerlig förstaderivata. Tyvärr fanns inte tillgång till program för B-spline interpolation, därför valdes i stället att jämföra linjär interpolation i Delaunay-triangelar med kriging-interpolation och bilinjär interpolation. Med interpolering i triangelnät (Delaunay-triangelar) fås kontinuerliga ytor men tillfällig fel filtreras ej bort. Genom att först använda kriging-interpolation filtreras bort tillfälliga fel, sen skapas kontinuerlig yta med bilinjär interpolation men tyvärr inte kontinuerlig förstaderivata.

## 5.2 Praktisk användning

Idag används Gtrans för transformering av koordinater samt för linjär och bilinjär interpolation i trianglar och gitter. Restfelshantering m.h.a. Delaunay-triangelar kan utföras i Gtrans. Restfelen kan även lagras som en TRIAD-bas. Användaren kan då utföra linjär interpolation i ett nät av trianglar (se avsnitt 4.4.2). För detta behöver användaren en K-fil med koordinater för punkterna som skall interpoleras och en TF-fil.

I praktisk användning skall användaren inte behöva utföra kriging-interpolation utan skall Lantmäteriet utföra den och lagra som en gitterfil i Gtrans. Användaren kan då utföra bilinjär interpolation på samma sätt som för höjdkorrektionsmodeller, t.ex. SWEN 01L. Eftersom höjdkorrektionsmodeller i Gtrans ges med 5 km gittertäthet eller med  $0,025^\circ$  täthet i x-led respektive  $0,05^\circ$  i y-led, skulle vara bra att lagra en gitterfil med samma täthet.

### 5.3 Fortsatta studier av interpolationsteknik

I detta examensarbete gjordes endast numeriska tester med kriging-interpolation och bilinjär interpolation samt linjär interpolation i triangelnät. Andra metoder som t.ex. B-spline skulle vara bra att jämföra eller andra form av kriging-interpolationer, t.ex. blockvis kriging och universell kriging (interpolation med inbyggd trend), se Burrough och McDonnell (1998). Dator- och programutvecklingen är snabb så att möjligen finns snart program som kan interpolera med bättre resultat än vad används idag.

## 6 Slutsatser

I avsnitt 2.7.4 ställdes upp önskade egenskaper hos interpolationsmetoderna och utifrån dessa egenskaper valdes två metoder, kriging-interpolation och bilinjär interpolation samt linjär interpolation i Delaunay-triangular, för att utföra numeriska tester med.

Både på nationell och lokal nivå indikerar resultatet av de numeriska testerna på att metoderna som användes i detta examensarbete för restfelshantering förbättrar höjdbestämning med GPS.

På nationell nivå indikerar resultatet att nuvarande metod för restfelshantering i höjddled med linjär interpolation i Delaunay-triangular ger bättre resultat än kriging-interpolation och bilinjär interpolation. På lokal nivå (i Borås kommun) tyder resultaten på att kriging-interpolation och bilinjär interpolation är användbar metod för restfelshantering i höjddled. Att resultatet är så olika på nationell och lokal nivå kan bero på data, eventuell större korrelation av restfel på nationell nivå. Med tanke på att underlaget på lokal nivå innehöll relativt få punkter bör ytterligare studier genomföras innan någon säkrare slutsats kan dras.

Mätnoggrannheten i en GPS-mätning spelar roll i relation till restfelens storlek. En del av GPS-mätmetoderna har noggrannhet på meternivå när andra metoder har noggrannhet som ligger på några millimeter, beroende på avståndet mellan referensstation (bas) och rörlig enhet (rover), se Tabell 2.5. Restfelen i höjddled är störst 185 mm på nationell nivå (av mätpunkterna) och 44 mm på lokal nivå. Restfelshantering är därför optimal när noggranna GPS-mätningar används, d.v.s. statistiska mätningar och RTK-mätningar. När felen i GPS-mätningen blir större, som för t.ex. absolutmätning eller DGPS, är det ingen nytta med restfelshantering.



## 7 Referenser

- Allén, S., 1997. *Svensk ordbok och Svensk uppslagsbok*. Norstedts Förlag, Stockholm.
- Burrough, P. A., McDonnell, R. A., 1998. *Principles of Geographical Information Systems*. Oxford University Press, Oxford.
- Eklundh, L. (red.), 2001. *Geografisk informationsbehandling, metoder och tillämpningar*, (andra upplagan). Byggforskningsrådet, Stockholm.
- Ekman, M., 1993. *Geoiden i Sverige och geoidhöjdssystemet RN 92*. Lantmäteriverkets Tekniska skrifter 1993:1. Lantmäteriverket, Gävle.
- Ekman, M., 1998. *Jordellipsoider, geoider, koordinatsystem, höjdssystem och tyngdkraftssystem i Sverige genom tiderna*. LMV-rapport 1998:4. Lantmäteriverket, Gävle.
- Ekman, M., 2002. *Latitud, longitud, höjd och djup, referenssystem och kartprojektioner inom geodesi, hydrografi och navigation*. Kartografiska Sällskapet. Gävle.
- Engberg, L. E., 2001. *Geodesi 2000*. LMV-rapport 2001:1. Lantmäteriverket, Gävle.
- Foley, J. D., van Dam, A. V., van Dam, A. V., 1990. *Computer Graphics, Principles and Practice*. Addison-Wesley, Reading.
- Gunnarsson, J., Ollvik, L., 2000. *Kompendium i geodetisk mätningsteknik, allmänna kurser*. Lunds Tekniska Högskola, Institutionen för Teknik och Samhälle, Lund.
- Heiskanen, W. A., Moritz, H., 1990. *Physical Geodesy*, (reprint). Technical University, Institute of Physical Geodesy, Graz.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Collins, J., 2001. *GPS, Theory and Practice* (Fifth, revised edition). Springer-Verlag Wien New York.
- Jivall, L., Lidberg, M., Lilje, M., Reit, B. G., 2001. *Transformationssamband mellan SWEREF 99 och RT 90/RH 70*. LMV-rapport 2001:7. Lantmäteriverket, Gävle.
- Jivall, L., 2001. *SWEREF 99 - New ETRS 89 Coordinates in Sweden*. LMV-rapport 2001:6. Lantmäteriet, Gävle.
- Lantmäteriverket, 1996 a. *Handbok till mätningkungörelsen - Geodesi, Detaljmätning*. Lantmäteriverket, Gävle.
- Lantmäteriverket, 1996 b. *Handbok till mätningkungörelsen - Geodesi, Stommätning*. Lantmäteriverket, Gävle.
- Lindgren, G., Rootzén, H., 2003. *Stationära stokastiska processer*. Lunds Universitet, Matematikcentrum, Matematisk statistik, Lund.
- O'Rourke, J., 1993. *Computational geometry in C*. Cambridge University Press, Cambridge.

*Refstrat – Strategier för referenssystem och referensnät. Slutrapport. LMV-rapport 2000:5. Lantmäteriverket, Gävle.*

Sugihara, K., 1999. *Surface interpolation based on new local coordinates.* Computer-Aided Design, volume 31, issue 1, s. 51–58.

Wolf, P. R., Ghilani, C. D., 2002. *Elementary Surveying. An introduction to Geomatics.* Prentice Hall, New Jersey.

Worboys, M. F., 1995. *GIS: A Computing Perspective.* Taylor Francis Ltd, London.

Östman, A, 1995. *Interpolering av geografiska data. Kompendium.* Tekniska högskolan i Luleå, Institutionen för samhällsbyggnadsteknik.

### **Hemsidor på Internet.**

Directorate-General Energy and Transport, 2004.

[http://europa.eu.int/comm/dgs/energy\\_transport/galileo/index\\_en.htm](http://europa.eu.int/comm/dgs/energy_transport/galileo/index_en.htm) (2004-01-19)

Lantmäteriet, 2003. <http://www.lantmateriet.se> (2003-11-19 – 2003-12-12).

SWEPOS, 2003. <http://swepos.lmv.lm.se/index.htm> (2003-11-19 – 2003-12-15).

### **Information via e-post och muntlig information**

Reit, Bo-Gunnar, 2004. I-divisionen Geodesi, Lantmäteriet. 2003–2004.

## Bilaga 1: Ordlista

<b>Absolutmätning:</b>	Är enklaste formen av GPS-mätning där endast en GPS-mottagare behövs.
<b>Bärvågsmätning:</b>	Mätning på GPS-satellitsignalens bärvåg. Kräver mer avancerad mottagare och beräkningsrutiner.
<b>CTP:</b>	Conventional Terrestrial Pole, d.v.s. medelpolen omkring 1900.
<b>DGPS:</b>	Differentiell GPS, en relativ mätmetod med kodmätning.
<b>ECS 62:</b>	European Calibration System 1962, europeiskt tyngdkraftssystem.
<b>ED 87:</b>	European Datum 1987, resultatet av den tredje beräkningen av Västeuropas triangelnät.
<b>ETRS 89:</b>	European Terrestrial Reference System 89, också benämnt EUREF 89, utgör en GPS-förtätning av det globala systemet ITRF 89 i Europa.
<b>Fixpunkt:</b>	Markerad punkt med avvägd höjd, som ingår i ett höjdnät.
<b>Galileo:</b>	Ett civilt framtida europeiskt system för navigering och positionering med hjälp av satelliter. Driftstart beräknas ske år 2008.
<b>Geoid:</b>	Oregelbunden buktig yta som sammanfaller med världshavens yta där det finns hav och fortsätter in genom kontinenterna, så den omsluter hela jorden. Geoiden avviker med upp till 100 m från jordellipsoiden p.g.a. inhomogen massfördelning i jorden.
<b>GLONASS:</b>	Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema är ett ryskt navigationssystem som i grunden är militärt. Har endast varit i full konstellation under kort tid 1996.
<b>GPS:</b>	Global Position System är amerikanskt satellitbaserat navigationssystem uppbyggt av USA:s försvarsmakt. Systemet består av minst 24 satelliter fördelade på 6 nästan cirkulära banplan i omkring 20 200 km höjd över jorden med omloppstid på knappt 12 timmar samt 5 kontrollstationer. GPS blev operationellt för civilt bruk 1993 och för militärt bruk 1995.
<b>GRS 1980:</b>	Geodetic Reference System 1980, en geocentrisk placerad jordellipsoid. Bestämd utifrån satellitbanor.
<b>I-divisionen Geodesi:</b>	Avdelning inom Lantmäteriet.

<b>ITRF:</b>	International Terrestrial Reference Frame är en samling internationellt utarbetade globala tredimensionella referenssystem. Dessa system beräknas återkommande, till en början varje år.
<b>Jordellipsoid:</b>	Se <b>Rotationsellipsoid</b> .
<b>Kodmätning:</b>	GPS-mätning, avståndsmätning på C/A- eller P-koden. Avståndet till en satellit bestäms genom att mäta hur lång tid det tar för en radiosignal från satelliten att nå mottagaren.
<b>Kvasigeoid:</b>	En kvasigeoid bygger på tyngdkraftsmätningar, fast på ett annat sätt än geoiden. I stället för medeltyngdkraften används teoretisk tyngdkraft – normaltyngdkraft i Stokes formel. Kvasigeoiden är därför inte en nivåyta i egentlig mening.
<b>NH 60:</b>	Nordiska höjdsystemet med epok 1960.0.
<b>NKG 89, NKG 96:</b>	NKG=Nordiska Kommissionen för Geodesi, nordiska geoider beräknade ur satellitbanestörningar och tyngdkraftsanomalier.
<b>Nätverks-RTK:</b>	Nätverks-RTK innebär att flera referensstationer används i stället för en (som vanlig RTK). Nätverks-RTK kan använda sig av nätet av fasta referensstationer i Sverige (SWEPOS).
<b>RAK 70:</b>	RAK=Rikets Allmänna Kartverk, en svensk geoid.
<b>Restfel:</b>	Avvikelser. I detta examensarbete skillnaden mellan höjder bestämda genom GPS-mätning och korrektion med SWEN 01L och höjder bestämda i RH 70 genom avvägning.
<b>Restfelshantering:</b>	Behandling av avvikelser (restfel).
<b>RH 00:</b>	Rikets höjdsystem 1900, systemet baserat på den första precisionsavvägningen i Sverige.
<b>RH 70:</b>	Rikets höjdsystem 1970, systemet baserat på den andra precisionsavvägningen i Sverige.
<b>RH B 70:</b>	Höjder för punkter tillkomna i den tredje precisionsavvägningen som räknats in i RH 70.
<b>RIX 95:</b>	Är ett nationellt projekt som avser dels anslutning av lokala nät för att etablera överföringssamband mellan kommunala och nationella (globala) system, dels en förtätning och GPS-anpassning av det plana riksnätet.
<b>RN 92:</b>	Rikets geoidhöjdssystem 1992.

- Rotationsellipsoid:** Används som (matematisk) modell av jorden, även kallad jordellipsoiden eller bara ellipsoiden.
- RT 38:** Rikets koordinatsystem 1938 (rikets triangelnät 1938), baserat på den andra rikstrianguleringen.
- RT 90:** Rikets koordinatsystem 1990 (rikets triangelnät 1990), baserat på den tredje rikstrianguleringen.
- RTK:** Real Time Kinematic, kinematisk relativ bärvågsmätning i realtid. En referens (bas) står över en känd punkt och tar emot GPS-registreringar och skickar korrekationer till den rörliga enheten (rover) med radiokommunikation eller via GSM.
- SWEN 01:** Rikets geoidhöjdssystem 2001 betecknat SWEN 01 (SWE står för SWEREF och N för geoidhöjd) är grundat på den nordiska geoidmodellen NKG 96 och inpassad på SWEREF 99 och RH 70. SWEN 01L (L står för landhöjningskorrektions) är en kombination av geoidhöjd och landhöjning, så den är i strikt bemärkelse inte en geoidmodell utan bör rubriceras som en höjdkorrekteringsmodell.
- SWEREF 99:** Swedish Reference Frame 1999, ett svenskt tredimensionellt referenssystem, en officiell realisering av ETRS 89.
- UEN 55, UEN 73:** United European Levelling Network 1955 respektive 1973. Höjdsystem som är resultatet av en gemensam utjämnning av Västeuropas höjdnät.
- WGS 84:** World Geodetic System 1984, ett globalt system för realtidsbestämning av koordinater med GPS. Även en jordellipsoid som är nästan identisk med GRS 1980.



## Bilaga 2: Rasterbild

**Tabell som visar värden för varje raster i rasterbilden för kriging-interpolation på lokal nivå med 5 km gittertätthet. Alla koordinater och interpolerade värden är i m.**

Rasternr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Koordinater	1312500	1317500	1322500	1327500	1332500	1337500	1342500	1347500	1352500
0	6430000	0.0000	0.0000	0.0140	0.0140	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	6425000	0.0000	0.0000	0.0140	0.0128	0.0083	0.0020	0.0000	0.0000
2	6420000	0.0000	-0.0257	-0.0143	0.0020	0.0042	0.0074	0.0203	0.0187
3	6415000	-0.0276	-0.0215	-0.0228	-0.0020	-0.0012	0.0030	0.0154	0.0157
4	6410000	-0.0282	-0.0013	0.0232	0.0118	-0.0141	-0.0102	0.0007	0.0060
5	6405000	0.0280	0.0264	0.0215	0.0033	-0.0141	-0.0237	-0.0134	0.0009
6	6400000	0.0134	0.0161	-0.0063	-0.0061	-0.0113	-0.0229	-0.0076	0.0054
7	6395000	0.0046	0.0095	0.0007	0.0058	-0.0182	-0.0328	-0.0171	0.0023
8	6390000	0.0190	0.0159	0.0183	0.0131	-0.0212	-0.0306	-0.0400	-0.0070

Tabellen som ger utvärderingspunkternas läge, mätvärdet i punkten, interpolerade värdet samt skillnaden mellan dem. Dessutom ges de numeriska resultat som visas i Tabell 4.4.

X [m]	Y [m]	Z <sub>mät</sub> [m]	Z <sub>interp</sub> [m]	Skillnad [m]
6401256.807	1318132.080	0.020	0.016	0.004
6401899.819	1327882.696	0.026	-0.005	0.031
6402121.837	1329194.354	0.002	-0.006	0.008
6407151.320	1324634.196	0.053	0.020	0.033
6412211.580	1336750.900	0.007	-0.012	0.019
6417567.242	1312654.760	-0.050	-0.024	-0.026
6419790.169	1335467.745	0.021	0.001	0.020
6417053.987	1348287.793	0.029	0.016	0.013
6422508.664	1329705.975	0.019	0.004	0.015
6425419.858	1326392.973	-0.006	0.014	-0.020
6425494.818	1343253.229	-0.031	0.000	-0.031
6391373.912	1320222.624	0.055	0.016	0.039
6394310.812	1343637.777	-0.024	-0.033	0.009
<b>Summa fel</b>		0.121		0.116
<b>Medelvärdet</b>		0.0093		0.0089
<b>Standardavvikelsen</b>		0.0310		0.0223
<b>Varians</b>		0.000963		0.000497
<b>Minimum</b>		-0.050		-0.031
<b>Maximum</b>		0.055		0.039



## Rapporter i geodesi och geografiska informationssystem från Lantmäteriverket

- 2000:4 Svanholm Niklas: Jämförelse av olika metoder att föra över kartdetaljer till ett nytt koordinatsystem.
- 2000:5 RefStrat-projektet: RefStrat – strategier för referenssystem och referensnät.
- 2001:1 Engberg Lars (ed.): Geodesi 2000 – svensk geodesiverksamhet under kommande tioårsperiod.
- 2001:6 Jivall Lotti: SWEREF 99 – new ETRS 89 coordinates in Sweden.
- 2001:7 Jivall Lotti, Lidberg Martin, Lilje Mikael, Reit Bo-Gunnar: Transformationssamband mellan SWEREF 99 och RT 90/RH 70.
- 2001:10 Rönberg Andreas: Undersökning av tjänster för differentiell GPS.
- 2002:1 Wiklund Peter: Slutrapport för projekt "Position Stockholm-Mälaren – 1".
- 2002:2 Wahlund Sara: Production measurements with network RTK – tests and analysis.
- 2002:5 Alfredsson Anders: Studier av deformationer vid byte av koordinatsystem.
- 2002:7 Persson Jan & Brynte Stefan: Kompatibilitet för nätverks-RTK-programvaran Trimble GPS-Net med olika typer av rörliga mottagare.
- 2003:4 Engfeldt Andreas, Norin Dan, Nielsen Jan, Holm Warming Louise, Grinde Gro, Johansson Daniel, Lilje Christina, Nilsson Andreas, Wiklund Peter, Kempe Tina, Frisk Anders: The 2002 NKG GNSMART/GPSNet test campaign.
- 2003:8 Vejdeland Sofia & Dahlberg Liselotte: Tolkarhet av GGD-objekt i bilder registrerade av olika sensorer.
- 2003:10 Engfeldt Andreas & Jivall Lotti: Så fungerar GNSS.
- 2003:11 Alm Malin & Munsin Anna-Stina: Traditionell RTK kontra nätverks-RTK – en noggrannhetsjämförelse.
- 2003:12 Jonsson Albert & Nordling Anders: Jämförelse av enkelstations-RTK och nätverks-RTK i Lantmäteriets testnät.
- 2004:1 Peterzon Martin: Distribution of GPS-data via Internet.
- 2004:4 Andersson Maria: Deformationer av fasta geometrier - en metodstudie.

L A N T M Ä T E R I E T



Vaktmästeriet 801 82 GÄVLE Tfn 026 - 65 29 15 Fax 026 - 68 75 94  
Internet: [www.lantmateriet.se](http://www.lantmateriet.se)